Chương 4

PHÂN TÍCH TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC LTI TRONG MIỀN TẦN SỐ

Trong chương III ta đã thấy phép biến đổi Z là một công cụ toán học hiệu quả trong việc phân tích hệ thống rời rạc LTI. Trong chương này, ta sẽ tìm hiểu một công cụ toán học quan trọng khác là *phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc*, gọi tắt là *DTFT (DT-Fourier Transform).*

Phép biến đổi này áp dụng để phân tích cho cả tín hiệu và hệ thống. Nó được dùng trong trường hợp dãy rời rạc dài vô hạn và không tuần hoàn.

Nội dung chính chương này bao gồm:

- Biến đổi Fourier
- Biến đổi Fourier ngược
- Các tính chất của biến đổi Fourier
- Phân tích tần số cho tín hiệu rời rạc (cách gọi thông dụng là phân tích phổ)
- Phân tích tần số cho hệ thống rời rạc

4.1 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

4.1.1 Biểu thức tính biến đổi Fourier

Ta đã biết rằng có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc tạo ra bằng cách lấy mẫu tín hiệu tương tự dưới dạng sau đây:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

Bây giờ ta sẽ tính biến đổi Fourier cho tín hiệu này. Các bước như sau:

1. Tính biến đổi Fourier của $\delta(t-kT)$.

2. Sử dụng nguyên lý xếp chồng, tìm biến đổi Fourier của $x_s(t)$.

$$x_s(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\omega T}$$

Đặt $x(nT) = x[n]$ và thay biến $\Omega = \omega T$ (xem lại chương I, lưu ý đơn vị của Ω [rad] và ω [rad/s]), ta được:

$$\text{DTFT}: X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Ta nhận xét thấy tuy tín hiệu rời rạc trong miền thời gian nhưng DTFT lại liên tục và tuần hoàn trong miền tần số.

DTFT chính là hàm phức theo biến tần số thực. Ta gọi DTFT là *phổ phức (complex spectrum)* hay ngắn gọn là phổ của tín hiệu rời rạc $x[n]$

4.1.2 Sự hội tụ của phép biến đổi Fourier

Không phải là tất cả DTFT đều tồn tại (hội tụ) vì DTFT chỉ hội tụ khi:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| < \infty$$

Ta luôn luôn có:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]e^{-j\Omega n}\right|$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|\left|e^{-j\Omega n}\right|$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|$$

Như vậy, nếu x[n] thỏa điều kiện:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right| < \infty$$

thì biến đổi Fourier hội tụ.

Ví dụ:

Tìm $X(\Omega)$ với $x[n] = a^n u[n]$, $|a|<1$. Nếu $|a|>1$?

Ví dụ:

Tìm $Y(\Omega)$ với $y[n] = a^n u[-n]$, $|a|>1$. Nếu $|a|<1$?

Ví dụ:

Cho $p[n] = u[n] - u[n-N]$. Tìm $P(\Omega)$.

Hãy chứng tỏ rằng biến đổi Fourier này có pha tuyến tính (*linear phase)*

Ví dụ:

Tìm $H(\Omega)$ của hệ LTI có đáp ứng xung sau

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

Và chứng tỏ rằng hệ có pha tuyến tính

4.1.4 Quan hệ giữa biến đổi Z và biến đổi Fourier

Biểu thức tính ZT là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Giả sử ROC có chứa đường tròn đơn vị. Tính X(z) trên đường tròn đơn vị, ta được:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

Như vậy, biến đổi Fourier chính là biến đổi Z tính trên đường tròn đơn vị. Dựa vào đây, ta có thể phát biểu lại điều kiện tồn tại của DTFT như sau:

Biến đổi Fourier của một tín hiệu chỉ tồn tại khi ROC của biến đổi Z của tín hiệu đó có chứa đường tròn đơn vị.

Ví dụ:

Làm lại các ví dụ trên- Tìm biến đổi Fourier của:

(a) $x[n]=a^n u[n]$, $|a|<1$. Nếu $|a|>1$?

(b) $y[n]=a^n u[-n]$, $|a|>1$. Nếu $|a|<1$?

(c) $p[n]=u[n]-u[n-N]$

(d) $h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]+\delta[n-3]$

4.2 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER NGƯỢC

4.2.1 Biểu thức tính biến đổi Fourier ngược

Ta thấy $X(\Omega)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π, do $e^{j\Omega}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π :

$$e^{j\Omega}=e^{j(\Omega+2\pi)}=e^{j\Omega}e^{j2\pi}=e^{j\Omega}.$$

Do đó dải tần số của tín hiệu rời rạc là một dải tần bất kỳ rộng 2π, thường chọn là: $(-\pi,\pi)$ hay $(0,2\pi)$.

Vậy ta có thể khai triển $X(\Omega)$ thành chỗi Fourier trong khoảng $(-\pi,\pi)$ hay $(0,2\pi)$ nếu điều kiện tồn tại $X(\Omega)$ thỏa mãn. Các hệ số Fourier là x[n], ta có thể tính được x[n] từ $X(\Omega)$ theo cách sau:

Nhân 2 vế của biểu thức tính DTFT với $\frac{1}{2\pi}e^{j\Omega l}$ rồi lấy tích phân trong khoảng $(-\pi,\pi)$ ta có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega l}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\right]e^{j\Omega l}d\Omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\Omega(l-n)}d\Omega\right]=x[l]$$

Thay l = n và thay cận tích phân, không nhất thiết phải là $(-\pi,\pi)$ mà chỉ cần khoảng cách giữa cận trên và dưới là 2π, ta được biểu thức tính biến đổi Fourier ngược (IDTFT) như sau:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Ta có thể tính IDTFT bằng hai cách: một là tính trực tiếp tích phân trên, hai là chuyển về biến đổi Z rồi tính như tính biến đổi Z ngược. Tùy vào từng trường hợp cụ thể mà ta chọn phương pháp nào cho thuận tiện.

4.2.2 Một số ví dụ tính biến đổi Fourier ngược

Ví dụ:

Tìm x[n] nếu biết:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

Ví dụ:

Tìm x[n] nếu biết:

$$X(\Omega) = \cos^2 \Omega$$

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

Sau đây ta sẽ xét một số tính chất quan trọng của DTFT, phần còn lại xem sách.

4.3.1 Tính tuyến tính

$$ax_1[n]+bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$$

4.3.2 Tính dịch thời gian

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

Qua đây ta thấy sự dịch chuyển tín hiệu trong miền thời gian sẽ không ảnh hưởng đến biên độ của DTFT, tuy nhiên pha được cộng thêm một lượng.

4.3.3 Tính dịch tần số/ điều chế

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$$

$$\cos(\Omega_0 n)x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(\Omega-\Omega_0)+\frac{1}{2}X(\Omega+\Omega_0)$$

Như vậy, việc điều chế tín hiệu gây ra sự dịch tần số.

4.3.4 Tính chập thời gian

Tương tự như biến đổi Z, với biến đổi Fourier ta cũng có:

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

Ví dụ:

Cho $h[n] = a^n u[n], |a| < 1$. Tìm hệ đảo của nó $h_i[n]$, nhưng không dùng biến đổi Z.

4.3.5 Tính nhân thời gian

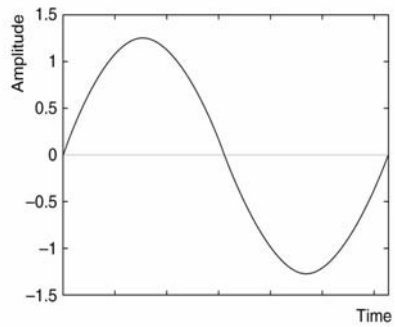
$$x_1[n].x_2[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\lambda)X_2(\Omega-\lambda)d\lambda$$

4.4 PHÂN TÍCH TẦN SỐ (PHỔ) CHO TÍN HIỆU RỜI RẠC

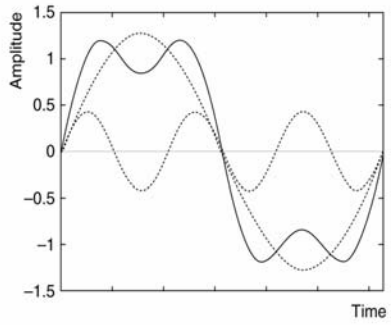
4.4.1 Ý nghĩa của phổ

Trong miền tần số, mỗi tín hiệu đều có đặc điểm riêng của nó. Ví dụ như, tín hiệu sin chỉ có duy nhất một tần số đơn, trong khi nhiễu trắng chứa tất cả các thành phần tần số. Sự biến thiên chậm của tín hiệu là do tần số thấp, trong khi sự biến thiên nhanh và những sườn nhọn là do tần số cao. Như xung vuông chẳng hạn, nó chứa cả tần số thấp và cả tần số cao. Hình sau minh họa cho điều đó. Hình (a) là một sóng sin tần số thấp, các hình sau (b)-(c) cộng thêm dần các sóng sin tần số cao dần. Hình cuối cùng (e) là tổng của 7 sóng sin. Trong hình (e) ta thấy tổng của 7 sóng sin có dạng xấp xỉ với dạng của một xung vuông.

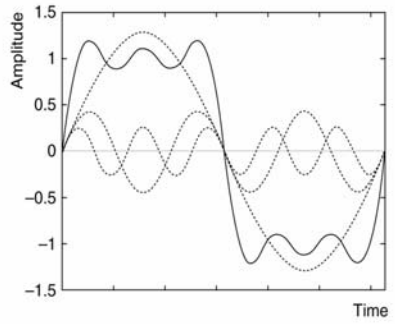
Phổ của tín hiệu là mô tả chi tiết các thành phần tần số chứa bên trong tín hiệu. Ví dụ như với tín hiệu xung vuông vừa nói trên, phổ của nó chỉ ra tất cả các đỉnh nhọn của các sóng sin riêng có thể kết hợp lại với nhau tạo ra xung vuông. Thông tin này quan trọng vì nhiều lý do. Ví dụ như, thành phần tần số trong một mẩu nhạc chỉ cho ta biết các đặc trưng của loa, để từ đó khi sản xuất lại ta có thể cải tiến cho hay hơn. Một ví dụ khác, micro trong hệ thống nhận dạng tiếng nói phải có dải tần đủ rộng để có thể bắt được tất cả các tần số quan trọng trong tiếng nói đầu vào. Để dự đoán các ảnh hưởng của bộ lọc trên tín hiệu, cần phải biết không chỉ bản chất của bộ lọc mà còn phải biết cả phổ của tín hiệu nữa.



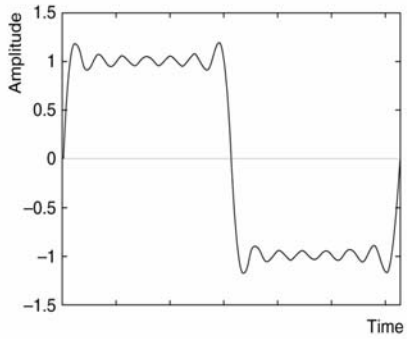
(a) Lowest Frequency Sine Wave



(b) Sum of Two Sine Waves



(c) Sum of Three Sine Waves



(e) Sum of Seven Sine Waves

4.4.2 Phổ biên độ và phổ pha

Phổ của tín hiệu gồm có hai phần: *phổ biên độ (magnitude spectrum)* và *phổ pha (phase spectrum).* Phổ biên độ chỉ ra độ lớn của từng hành phần tần số. Phổ pha chỉ ra quan hệ pha giữa các thành phần tần số khác nhau. Trong phần này, ta xét tín hiệu rời rạc không tuần hoàn. Công cụ để tính phổ tín hiệu rời rạc không tuần hoàn là DTFT.

Để tính phổ tín hiệu, ta qua hai bước: một là tính DTFT của tín hiệu- là $X(\Omega)$, hai là tính biên độ và pha của $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)}$$

ở đây $|X(\Omega)|$ là phổ biên độ và $\theta(\Omega)$ là phổ pha.

Ta dễ dàng chứng minh được rằng đối với tín hiệu thực, phổ biên độ là một hàm chẵn theo tần số Ω và phổ pha là một hàm lẻ theo Ω.

Do đó, nếu biết phổ $X(\Omega)$ trong khoảng 0 đến π, ta có thể suy ra phổ trong toàn dải tần số.

Để dễ giải thích phổ, tần số số Ω từ 0 đến π thường được chuyển đổi thành tần số tương tự f từ 0 đến $f_S/2$ nếu tần số lấy mẫu là f_S.

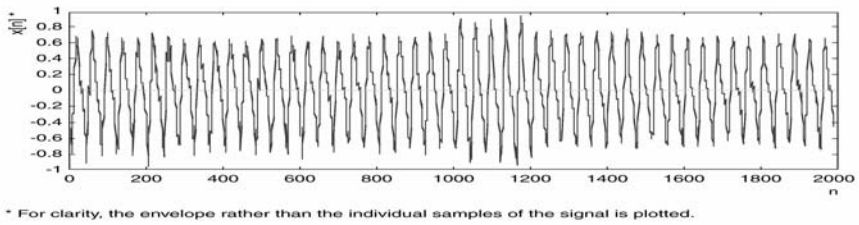
Ví dụ:

Tìm phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu chữ nhật:

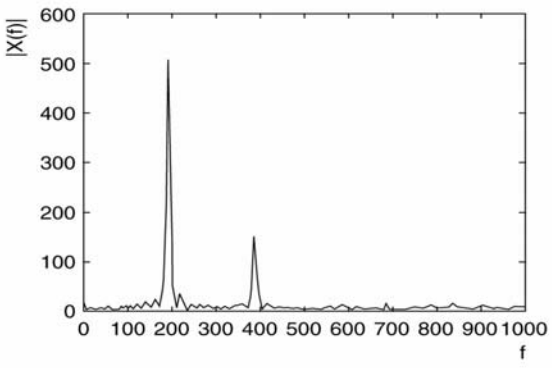
$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

Ví dụ:

Một mẩu nguyên âm tiếng nói "eee" được lấy mẫu ở tần số 8 kHz. Phổ biên độ của tín hiệu này như trên hình. Hỏi tần số cơ bản của tín hiệu này là bao nhiêu?



* For clarity, the envelope rather than the individual samples of the signal is plotted.



4.4.3 Mật độ phổ năng lượng

Năng lượng của tín hiệu x[n] được định nghĩa là:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Bây giờ ta biểu diễn năng lượng theo phổ:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\Omega)e^{-j\Omega n}d\Omega\right]$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng và tích phân, ta có:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\Omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right]d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Vậy quan hệ về năng lượng giữa x[n] và $X(\Omega)$ là:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \text{ (quan hệ Parseval)}$$

Đại lượng $S_{xx}(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ gọi là mật độ phổ năng lượng.

Ví dụ:

Xác định mật độ phổ năng lượng của tín hiệu sau:

$$x[n] = a^n u[n] \text{ với } -1 < a < 1$$

4.4.4 Băng thông

Băng thông (bandwidth) là dải tần số tập trung hầu hết năng lượng (công suất) của tín hiệu. Giả sử 95% năng lượng của tín hiệu tập trung trong dải tần số $F_1 \le F \le F_2$, ta nói băng thông 95% của tín hiệu là $F_2 - F_1$. Ta có thể định nghĩa các băng thông 75%, băng thông 90%, băng thông 99%... theo kiểu tương tự như băng thông 95% nói trên.

Dựa vào băng thông của tín hiệu, ta có thể phân loại tín hiệu như sau:

Nếu năng lượng tín hiệu tập trung quanh tần số 0 thì đó là *tín hiệu tần số thấp (low-frequency signal).*

Nếu năng lượng tín hiệu tập trung ở miền tần số cao thì đó là *tín hiệu cao tần (high-frequency signal).*

Nếu năng lượng tín hiệu tập trung vào một dải tần số nào đó giữa tần số thấp và tần số cao thì đó là *tín hiệu thông dải (bandpass signal)*

Trong trường hợp tín hiệu thông dải, khái niệm *băng hẹp (narrowband)* được dùng để chỉ tín hiệu có băng thông $F_2 - F_1$ rất nhỏ (khoảng 10% hoặc nhỏ hơn) so với tần số trung tâm $(F_1 + F_2)/2$. Ngược lại, tín hiệu được gọi là *băng rộng (wideband).*

Tín hiệu được gọi là có *băng thông hữu hạn (bandlimited)* nếu phổ của nó bằng 0 ở ngoài dải tần $|F| \geq B$. Tín hiệu năng lượng x[n] được gọi là có băng thông hữu hạn nếu:

$$|X(\Omega)| = 0, \quad \Omega_0 < |\Omega| < \pi$$

4.5 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CHO HỆ THỐNG RỜI RẠC LTI

Trong miền tần số, hệ thống rời rạc LTI được mô tả bằng một hàm theo tần số- gọi là *đáp ứng tần số (frequency response)- là biến đổi Fourier của đáp ứng xung h[n]*:

Quan hệ giữa tín hiệu vào- ra và hệ thống trong miền tần số như sau:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$Y(\Omega) = X(\Omega).H(\Omega)$$

Đáp ứng tần số hoàn toàn đặc trưng cho hệ rời rạc LTI trong miền tần số. Nó cho phép ta:

- xác định các đáp ứng của hệ thống với các đầu vào có dạng tổ hợp tuyến tính của tín hiệu sin hay hàm mũ phức.

- xác định các đặc tính của hệ LTI là bộ lọc tần số.

4.5.1 Tính đáp ứng tần số

1. *Tính từ đáp ứng xung*

Theo định nghĩa, đáp ứng tần số là $H(\Omega)$ được tính như sau:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

2. *Tính từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng*

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

Lấy DTFT 2 vế, sử dụng tính chất tuyến tính và dịch thời gian, ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} [a_k e^{-j\Omega k}] Y(\Omega = \sum_{r=0}^{M} [b_r e^{-j\Omega r}] X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\Omega r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

Ví dụ:

Tìm đáp ứng tần số của hệ:

$$y[[n]] + 0.1y[[n-1]] + 0.85y[n-2] = x[n] - 0.3x[n-1]$$

3. Tính từ hàm truyền đạt

Theo quan hệ giữa phép biến đổi Z và phép biến đổi Fourier, ta có thể tính được đáp ứng tần số từ hàm truyền đạt bằng cách thay $z = e^{j\Omega}$ (với điều kiện là ROC có chứa đường tròn đơn vị):

$$H(\Omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

4.5.2 Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha

Do đáp ứng tần số $H(\Omega)$ là hàm theo biến phức Ω nên có thể biểu diễn như sau:

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)}$$

$|H(\Omega)|$ được gọi là đáp ứng biên độ và $\theta(\Omega)$ được gọi là đáp ứng pha.

Ví dụ:

Cho đáp ứng tần số của hệ sau:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\Omega}}$$

Tìm đáp ứng biên độ và pha.

4.5.3 Đáp ứng của hệ LTI đối với đầu vào là tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin hay hàm mũ phức

1. Đáp ứng trạng thái 0 đối với đầu vào dạng hàm mũ phức

Từ chương II, ta đã biết đáp ứng của hệ (điều kiện đầu là 0) là:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Giả sử tín hiệu vào là tín hiệu hàm mũ phức sau:

$$x[n] = Ae^{j\Omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

với A là biên độ và Ω là một tần số trong dải tần $(-\pi, \pi)$.

Thay x[n] vào biểu thức y[n] ở trên, ta được:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(Ae^{j\Omega(n-k)}\right) \\ &= A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(e^{-j\Omega k}\right)\right]e^{j\Omega n} \\ &= (Ae^{j\Omega n})H(\Omega) \\ &= x[n]H(\Omega) \end{aligned}$$

Ta thấy đáp ứng của hệ có dạng giống dạng của đầu vào, tức là dạng hàm mũ phức với cùng tần số, chỉ khác nhau một hệ số nhân là $H(\Omega)$.

Điều này cũng đúng trong trường hợp tín hiệu vào có dạng sin/cos.

Ví dụ:

Xác định đầu ra của hệ thống có đáp ứng xung là:

$$h[n] = (1/2)^n u[n]$$

khi đầu vào có dạng:

(a) $x[n] = Ae^{j\frac{\pi}{2}n}, \quad -\infty < n < \infty$. Cho biết $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^0}$

(b) $x[n] = 10 - 5\sin\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n, \quad -\infty < n < \infty$

2. Eigenfunction và eigenvalue

Nếu ta có tín hiệu vào và tín hiệu ra có thể phân tích thành các hàm cơ sở là:

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n]$$

$$y[n] = \sum_k a_k \psi_k[n]$$

Các hàm cơ sở này có cùng dạng là $\phi_k[n]$, chỉ khác nhau một hệ số nhân (thực/ phức) b_k :

$$\psi_k[n] = \phi_k[n] * h[n] \text{ và } \psi_k[n] = b_k \phi_k[n]$$

thì $\phi_k[n]$ được gọi là một *eigenfunction* của hệ rời rạc LTI với *eigenvalue* là b_k .

Trong trường hợp này, tín hiệu vào có dạng hàm mũ phức như trên là eigenfunction và $H(\Omega)$ tính tại cùng tần số của tín hiệu vào là eigenvalue tương ứng.

3. Đáp ứng trạng thái bền và đáp ứng nhất thời

Ta có thể phân tích đáp ứng của hệ thống thành hai thành phần. Thành phần thứ nhất không tiến tới 0 khi n tiến tới vô cùng, được gọi là *đáp ứng trạng thái bền (steady-sate response)* $y_{ss}[n]$. Thành phần này tồn tại trong cùng khoảng thời gian tồn tại của đầu vào. Thành phần kia tiến tới 0 khi n tiến tới vô cùng, được gọi là *đáp ứng nhất thời (transient response)* $y_{tr}[n]$

Trong nhiều ứng dụng thì đáp ứng nhất thời không quan trọng vì chỉ tồn tại trong một khoảng thời gian ngắn và do vậy mà nó thường được bỏ qua.

Ví dụ:

Cho tín hiệu $x[n] = Ae^{j\Omega n}$, $n \geq 0$ đi vào hệ thống $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ $(|a| < 1)$

Cho điều kiện đầu là y[-1]. Tìm đáp ứng của hệ, đáp ứng trạng thái bền, đáp ứng nhất thời.

Tín hiệu ra là:

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] - \frac{Aa^{n+1} e^{-j\Omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\Omega}} e^{j\Omega n} + \frac{A}{1 - ae^{-j\Omega}} e^{j\Omega n}, \; n \geq 0$$

Ta có đáp ứng trạng thái bền là:

$$y_{ss}[n] = \lim_{n\to\infty} y[n] = \frac{A}{1 - ae^{-j\Omega}} = AH(\Omega)e^{j\Omega n}$$

Hai số hạng đầu của y[n] giảm về 0 khi n tiến tới vô cùng. Đó là đáp ứng nhất thời:

$$y_{tr}[n] = a^{n+1}y[-1] - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\Omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\Omega}}e^{j\Omega n},\ n \geq 0$$

Tổng quát, khi tín hiệu vào là:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} X_k z_k^n$$

Bằng cách xếp chồng, ta tìm được đáp ứng trạng thái bền như sau:

$$y_{ss}[n] = \sum_{k=1}^{M} X_k H(z_k) z_k^n.$$

Ví dụ:

Cho đầu vào $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, và

$$h[n] = (.5)^n u[n]$$

Tìm đáp ứng trạng thái bền.

$$y_{ss}[n] = H\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

4.5.4 Hệ LTI là bộ lọc tần số

Bộ lọc (filter) là một hệ thống xử lý tín hiệu bằng cách thay đổi các đặc trưng tần số của tín hiệu theo một điều kiện nào đó.

Nói cách khác, bộ lọc thay đổi phổ của tín hiệu vào $X(\Omega)$ theo đáp ứng tần số $H(\Omega)$ để tạo ra tín hiệu ra có phổ là: $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$. Đáp ứng tần số ở đây đóng vai trò là một hàm trọng số hay một hàm thay đổi dạng phổ đối với các thành phần tần số khác nhau trong tín hiệu vào. Khi xét theo quan điểm này thì bất kỳ một hệ LTI nào cũng có thể được xem là một bộ lọc tần số, ngay cả khi nó không ngăn một vài hay tất cả các thành phần tần số trong tín hiệu vào. Do vậy ta có thể đồng nhất hai khái niệm bộ lọc tần số và hệ LTI.

Trong môn học này, ta dùng thuật ngữ "bộ lọc" là để chỉ các hệ LTI thực hiện chức năng chọn lọc tín hiệu theo tần số. Bộ lọc cho các thành phần tần số của tín hiệu trong một dải tần nào đó đi qua và ngăn không cho các thành phần tần số khác đi qua. Dải tần số cho qua gọi là *dải thông (passband)* và dải tần số không cho qua gọi là *dải chắn (stopband/block-band).* Tần số giới hạn giữa dải thông và dải chắn gọi là *tần số cắt (cut-off frequency)*

Cách mô tả bộ lọc đơn giản nhất là biểu diễn dạng của nó trong miền tần số. Đó chính là đáp ứng tần số, gồm đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

Xét bộ lọc có dải thông là (Ω_1, Ω_2). Nếu đây là bộ lọc lý tưởng thì đáp ứng tần số có dạng như sau:

$$H(\Omega) = \begin{cases} Ce^{-j\Omega n_0}, \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \\ 0, \quad \Omega \neq \end{cases}$$

ở đây C và n_0 là hằng số.

Tín hiệu ra bộ lọc lý tưởng có dạng:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = CX(\Omega)e^{-j\Omega n_0}, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$

$$y[n] = Cx[n - n_0]$$

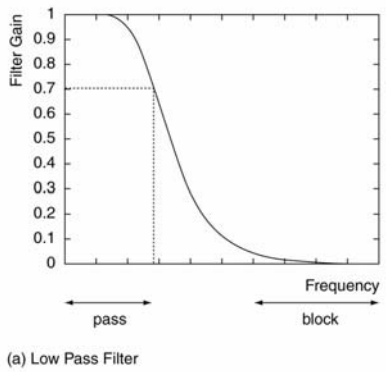
Ta thấy tín hiệu ra đơn giản chỉ là tín hiệu vào bị thay đổi một hệ số nhân và bị trễ đi một khoảng thời gian. Sự thay đổi biên độ và trễ này không làm méo tín hiệu.

Vậy bộ lọc lý tưởng là bộ lọc có đáp ứng biên độ có dạng chữ nhật và đáp ứng pha là tuyến tính trong dải thông:

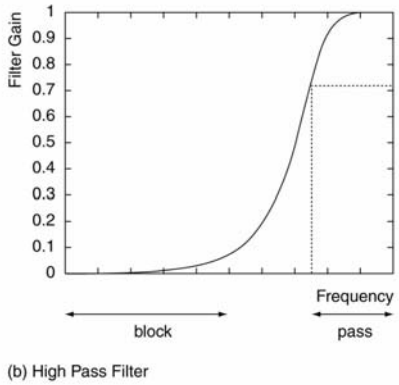
$$|H(\Omega)| = C, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$
$$\theta(\Omega) = -\Omega n_0, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$

Có rất nhiều loại bộ lọc khác nhau với rất nhiều ứng dụng khác nhau, trong đó thông dụng nhất là bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải.

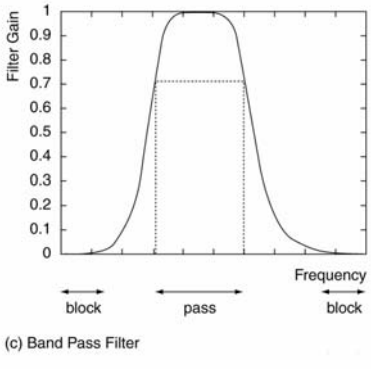
Hình sau vẽ các đáp ứng biên độ của 4 loại bộ lọc thông dụng.



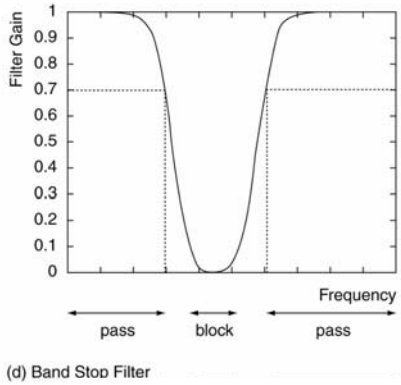
(a) Low Pass Filter



(b) High Pass Filter



(c) Band Pass Filter



(d) Band Stop Filter

Các đáp ứng biên độ trên không có dạng chữ nhật vì đây không phải là bộ lọc lý tưởng. Giữa dải thông và dải chắn có một *dải chuyển tiếp (transition band). Độ lợi (gain)* của bộ lọc tại một tần số nào đó là giá trị của đáp ứng biên độ tại tần số đó. Tần số cắt là tần số tại điểm mà độ lợi là $1/\sqrt{2}$ của giá trị lớn nhất. Bộ lọc càng tiến gần đến bộ lọc lý tưởng hơn khi độ dốc của bộ lọc càng lớn, dải chuyển tiếp càng nhỏ. Điều này yêu cầu bậc của bộ lọc phải lớn.

Ta sẽ quay lại tìm hiểu kỹ hơn về bộ lọc và thiết kế bộ lọc sau này.