Chương 2

TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

Nội dung chính chương này là:

- Giới thiệu các tín hiệu rời rạc cơ bản
- Các phép toán trên tín hiệu rời rạc
- Phân loại tín hiệu rời rạc
- Biểu diễn hệ thống rời rạc
- Phân loại hệ thống rời rạc
- Hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến
- Tổng chập rời rạc
- Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng
- Cấu trúc hệ rời rạc tuyến tính bất biến

2.1 TÍN HIỆU RỜI RẠC

Như đã trình bày trong chương I, tín hiệu rời rạc x(n) có thể được tạo ra bằng cách lấy mẫu tín hiệu liên tục $x_a(t)$ với chu kỳ lấy mẫu là T. Ta có:

$$x_a(t)\Big|_{t=nT} = x_a(nT) \equiv x(n), \quad -\infty < n < \infty$$

Lưu ý n là biến nguyên, x(n) là hàm theo biến nguyên, chỉ xác định tại các giá trị n nguyên. Khi n không nguyên, x(n) không xác định, chứ không phải bằng 0.

Trong nhiều sách về xử lý tín hiệu số, người ta quy ước: khi biến nguyên thì biến được đặt trong dấu ngoặc vuông và khi biến liên tục thì biến được đặt trong dấu ngoặc tròn. Từ đây trở đi, ta ký hiệu tín hiệu rời rạc là: x[n].

Cũng như tín hiệu liên tục, có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc bằng hàm số, bằng đồ thị, bằng bảng. Ngoài ra, ta còn có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc dưới dạng dãy số, mỗi phần tử trong dãy số là một giá trị của mẫu rời rạc.

Ví dụ:

Cho tín hiệu rời rạc sau:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1,3 \\ 4, & n = 2 \\ 0, & n \neq \end{cases}$$

Biểu diễn tín hiệu trên dưới dạng bảng, đồ thị, dãy số

2.1.1 Một số tín hiệu rời rạc cơ bản

1. Tín hiệu bước nhảy đơn vị (Discrete-Time Unit Step Signal)

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Tín hiệu bước nhảy dịch chuyển có dạng sau:

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$

2. Tín hiệu xung đơn vị (Discrete-Time Unit Impulse Signal)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Tín hiệu xung dịch chuyển có dạng sau:

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

So sánh tín hiệu bước nhảy và xung đơn vị liên tục và rời rạc, ta thấy có một số điểm khác nhau, được trình bày trong bảng 2.1.

Continuous time	Discrete time
$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$	$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$
$\delta(t)\equiv\frac{d}{dt}u(t)$	$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$
$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$	$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$
$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$

Bảng 2.1 *Tín hiệu bước nhảy và xung đơn vị liên tục và rời rạc*

3. *Tín hiệu dốc đơn vị (Discrete-Time Unit Ramp Signal)*

$$r[n]=\begin{cases}n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

4. *Tín hiệu hàm mũ (Discrete-Time Exponential Signal)*

$$x[n]=a^{n}\quad \forall n$$

2.1.2 Các phép toán trên tín hiệu rời rạc

1. *Phép đảo thời gian*

$$y[n]=x[m]\big|_{m=-n}=x[-n]$$

Rõ ràng, phép đảo này được thực hiện bằng cách đảo tín hiệu qua trục tung.

2. *Phép thay đổi thang thời gian*

$$y[n] = x[m]\big|_{m=an} = x[an]$$

Phép toán này còn gọi là phép thay đổi tần số lấy mẫu. Yêu cầu a ở đây phải thoả mãn các điều kiện sau:

Nếu $|a| > 1$ thì phép toán được gọi là tăng tần số lấy mẫu (nén tín hiệu), yêu cầu a phải nguyên.

Ví dụ: a = 2

Nếu $|a| < 1$ thì phép toán được gọi là giảm tần số lấy mẫu (giãn tín hiệu), yêu cầu a = 1/K, với K là số nguyên.

Ví dụ: a = ½. Tìm z[n] = b[n/2]

n	$z[n]$	$b[\frac{n}{2}]$
0	$z[0]$	$b[0]$
1	$z[1]$	??
2	$z[2]$	$b[1]$
3	$z[3]$	??

Các giá trị b[1/2] và b[3/2] không xác định được, vậy làm thế nào xác định z[1] và z[3]? Giải pháp được chọn là nội suy. Có nhiều cách nội suy khác nhau, trong đó cách đơn giản là nội suy tuyến tính như sau:

$$z[n] = \begin{cases} b[n/2], & n \text{ even} \\ 1/2\{b[(n-1)/2] + b[(n+1)/2]\}, & n \text{ odd} \end{cases}$$

Nội suy tuyến tính là đủ đảm bảo yêu cầu chất lượng đối với các thuật toán nén đơn giản. Đối với các phương pháp nén số liệu chất lượng cao, người ta sử dụng những phương pháp nội suy khác phức tạp hơn.

3. *Phép dịch thời gian*

$$y[n] = x[m]\big|_{m=n-n_0} = x[n-n_0]$$

ở đây y[n] là bản dịch thời gian của tín hiệu gốc x[n]

Ví dụ:

Cho $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$, tìm và vẽ $y[n] = x[n-3]$

Trong nhiều trường hợp, yêu cầu ta phải kết hợp các phép toán trên, chẳng hạn như kết hợp phép đảo với phép dịch thời gian, kết hợp phép đảo, dịch với thay đổi thang thời gian. Xem các ví dụ minh họa sau đây:

Ví dụ:

Vẽ đồ thị tín hiệu u[3-n]

Ví dụ:

Cho $x[n] = 2u[n+2]$. Tìm $z[n] = x[3-2n]$.

n	$z[n]$	$x[3-2n]$
0	$z[0]$	$x[3]$
1	$z[1]$	$x[1]$
2	$z[2]$	$x[-1]$
−1	$z[-1]$	$x[5]$
−2	$z[-2]$	$x[7]$

Ví dụ:

Cho $y[n] = a^n u[n]$, where $a > 1$. Tìm $z[n] = y[-2n+2]$.

4. Phép thay đổi biên độ tín hiệu

Cho $y[n] = Ax[n] + B$, nếu $A < 0$, ta đảo ngược biên độ của tín hiệu; $|A|$ điều khiển thang biên độ và B điều khiển độ dịch chuyển biên độ, dịch tín hiệu lên trên (B>0) hay xuống dưới (B<0).

Ngoài ra, ta có các phép thay đổi biên độ khác như tìm biên độ và pha của tín hiệu phức, cộng và nhân 2 tín hiệu với nhau. Lưu ý các phép thay đổi biên độ yêu cầu các tín hiệu phải được đặt ở cùng gốc thời gian.

Ví dụ:

Tìm $x[n] = (u[n+1] - u[n-5])(nu[2-n])$

2.1.3 Phân loại tín hiệu rời rạc

1. Tín hiệu chẵn và tín hiệu lẻ (even and odd signals)

Một tín hiệu rời rạc có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ như sau:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Trong đó

$$\text{Even} : x_e[n] = x_e[-n]$$

$$\text{Odd} : x_o[n] = -x_o[-n]$$

$$x_e[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_o[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

2. Tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn

Như đã trình bày trong mục 1.4.2, tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu thỏa mãn điều kiện sau:

x[n+N] = x[n] với mọi n

Giá trị N nhỏ nhất gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu.

Ví dụ:

Các tín hiệu sau là tuần hoàn hay không tuần hoàn? Nếu tín hiệu tuần hoàn, xác định chu kỳ cơ bản.

(a) $x_1[n] = e^{j\frac{\pi}{6}n}$

(b) $x_2[n] = \sin(\frac{3\pi}{5}n + 1)$

(c) $x_3[n] = \cos(2n - \pi)$

(d) $x_4[n] = \cos(1.2\pi n)$

(e) $x_5[n] = e^{-j\frac{n}{3}}$

3. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

Năng lượng của tín hiệu:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Công suất trung bình của tín hiệu:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Nếu tín hiệu có năng lượng hữu hạn, tín hiệu được gọi là tín hiệu năng lượng.

Nếu tín hiệu có năng lượng vô hạn và có công suất trung bình hữu hạn, tín hiệu được gọi là tín hiệu công suất.

Ví dụ:

Trong các tín hiệu sau đây, đâu là tín hiệu năng lượng? đâu là tín hiệu công suất?

(a) Tín hiệu bước nhảy đơn vị

(b) Tín hiệu dốc đơn vị

(c) Tín hiệu $x[n]=\begin{cases}(1/2)^n, & n\geq 0\\ (2)^n, & n<0\end{cases}$

(d) Tín hiệu $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)(u[n]-u[n-4])$

2.2 HỆ THỐNG RỜI RẠC

Như đã trình bày trong chương I, hệ thống rời rạc là thiết bị/ thuật toán xử lý tín hiệu rời rạc. Nó biến đổi tín hiệu rời rạc đầu vào thành tín hiệu rời rạc đầu ra khác đầu vào nhằm một mục đích nào đó. Tín hiệu rời rạc đầu vào gọi là *tác động (excitation)* và tín hiệu rời rạc đầu ra gọi là *đáp ứng (response)*

Quan hệ đầu vào và đầu ra như sau:

$$y[n]=T(x[n])$$

với T là ký hiệu cho một toán tử hoặc là một quá trình xử lý của hệ thống.

2.2.1 Biểu diễn hệ thống rời rạc

Có nhiều cách biểu diễn hệ rời rạc khác nhau, trong nhiều miền khác nhau. Trong miền thời gian, ta có các cách biểu diễn hệ rời rạc sau đây:

1. Biểu diễn vào-ra

Trong cách biểu diễn này, ta giả sử hệ rời rạc là một hộp đen, không biết hoặc lờ đi cấu trúc bên trong của nó. Quan hệ vào-ra là quan hệ giữa x[n] và y[n] được mô tả bằng một phương trình toán. Đặt vào đầu vào một tín hiệu x[n] cụ thể, căn cứ vào phương trình ta sẽ tìm được đầu ra tương ứng.

Ví dụ:

y[n] = x[n] + x[n-1]

2. Biểu diễn bằng đáp ứng đối với một tác động cụ thể

Trong cách biểu diễn này, ta cho đầu vào là một tín hiệu cụ thể và tìm đầu ra. Đầu ra đó hoàn toàn đặc trưng cho một hệ thống cụ thể. Có 2 loại đáp ứng được dùng phổ biến là *đáp ứng xung (impulse response)*- là đáp ứng đối với đầu vào là xung đơn vị và *đáp ứng bước (step response)*- là đáp ứng đối với đầu vào là tín hiệu bước nhảy đơn vị.

Ví dụ:

Cho hệ thống có quan hệ vào-ra là: y[n]= x[n] + x[n-1]. Tìm đáp ứng xung và đáp ứng bước

3. Biểu diễn bằng sơ đồ

Trong nhiều trường hợp, để biết được cấu trúc của hệ rời rạc, ta biểu diễn hệ rời rạc bằng sơ đồ khối/ cấu trúc. Trong môn học này, ta xét một số khối cơ bản sau: khối trễ, khối nhân với hằng số, khối cộng 2 tín hiệu. Ta có thể kết nối các khối này với nhau để tạo nên các hệ thống phức tạp.

Ví dụ:

Sử dụng các khối cơ bản kể trên, vẽ sơ đồ khối hệ thống có quan hệ vào-ra sau:

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Ta cũng có thể kết nối các hệ con lại với nhau để tạo thành các hệ lớn hơn. Có 3 cách kết nối chính là: nối tiếp, song song và hồi tiếp (dương/ âm)

2.2.2 Phân loại hệ rời rạc

1. Hệ có nhớ và không nhớ

Hệ không nhớ là hệ có tín hiệu ra ở thời điểm n_0 chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào ở cùng thời điểm n_0 đó:

$$y[n_0] = f(x[n_0])$$

Ngược lại, hệ có nhớ có tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào ở cùng thời điểm và ở các thời điểm khác nhau.

Ví dụ:

Các hệ sau là có nhớ hay không nhớ?

(a) $y[n] = x[n] + 5$

(b) $y[n] = (n+5)x[n]$

(c) $y[n] = x[n+5]$

2. Hệ khả đảo và không khả đảo

Hệ khả đảo là hệ mà ta có thể mắc nối tiếp nó với một hệ khác để được tín hiệu ra trùng với tín hiệu gốc ban đầu:

$$T_i[T(x[n])] = x[n]$$

Ví dụ:

(a)

$T : y[n] = x[n+1]$

$T_i : x[n] = y[n-1]$

(b)

$$T : y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$T_i : x[n] = y[n] - y[n-1]$

(c)

Bộ chỉnh lưu $y[n] = |x[n]|$ không phải là một hệ khả đảo.

3. Hệ nhân quả và không nhân quả

Hệ nhân quả là hệ có $y[n]$ tại $n = n_0$ chỉ phụ thuộc vào $x[n]$ với $n \le n_0$. Nói cách khác, tín hiệu ra không phụ thuộc vào các giá trị vào tương lai mà chỉ phụ thuộc vào các giá trị vào trong quá khứ và hiện tại.

"A causal system does not laugh before it is tickled"

Hầu hết các hệ vật lý đều nhân quả, nhưng có thể có hệ vật lý không nhân quả- chẳng hạn như xử lý ảnh trên máy tính.

Hệ không nhớ là hệ nhân quả nhưng điều ngược lại không đúng.

Ví dụ:

Xét tính nhân quả của các hệ sau:

(a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

(b) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

(c) $y[n] = x[2n]$

(d) $y[n] = x[n] + 3x[n+4]$

4. Hệ ổn định BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) và không ổn định

Hệ ổn định là hệ có tín hiệu ra hữu hạn khi tín hiệu vào hữu hạn

Nếu vào là $|x[n]| \le B_1, \forall n$ thì ra là $|y[n]| \le B_2, \ \forall n$

"Reasonable (well-behaved) inputs do not cause the system output to blow up"

Ví dụ:

Xét tính ổn định BIBO của các hệ sau:

(a) $y[n] = x[n-1]$

(b) $y[n] = \cos(x[n])$

(c) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

5. Hệ tuyến tính và không tuyến tính

Hệ tuyến tính là hệ thỏa mãn nguyên lý xếp chồng:

$$T[x_1[n]] = y_1[n] \text{ and } T[x_2[n]] = y_2[n] \Rightarrow$$
$$T[ax_1[n] + bx_2[n]] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Ví dụ:

Xét tính tuyến tính của các hệ sau đây:

(a) $y[n] = nx[n]$

(b) $y[n] = x[n^2]$

(c) $y[n] = x^2[n]$

(d) $y[n] = Ax[n] + B$

6. Hệ bất biến và không bất biến

Hệ bất biến: khi tín hiệu vào bị dịch một khoảng thời gian thì tín hiệu ra cũng bị dịch đi cùng khoảng thời gian đó:

$$T[x[n]] = y[n]$$
$$T[x[n-n_0]] = y[n-n_0]$$

Ví dụ:

Xét tính bất biến của các hệ sau đây:

(a) $y[n] = x[2n]$

(b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(c) $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]$

(d) $y[n] = nx[n]$

(e) $y[n] = x[n]u[n]$

2.3 HỆ RỜI RẠC TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

Ta sẽ xét một trường hợp quan trọng- đó là hệ rời rạc vừa tuyến tính vừa bất biến, gọi tắt là *hệ LTI (Linear Time-Invariant Systems)*

2.3.1 Đáp ứng xung của hệ LTI- Tổng chập

Ta có thể mô tả tín hiệu rời rạc x[n] dưới dạng sau:

$$x[n] = ... + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + ...$$

viết gọn lại là:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Phương trình này biểu diễn $x[n]$ là tổng của các hàm xung dịch thời gian, có biên độ thay đổi với trọng số $x[k]$.

Ví dụ:

$$x[n] = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & -2 \le n \le 4 \\ 0, & n \ne \end{cases} = \frac{6}{4}\delta[n+2] + \frac{5}{4}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{3}{4}\delta[n-1] + \frac{2}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n-3]$$

Hệ ta xét là hệ tuyến tính nên đáp ứng đối với x[n] là tổng của các đáp ứng đối với $\delta[n-k]$ với trọng số $x[k]$. Gọi đáp ứng của hệ đối với $\delta[n-k]$ là $h_k[n]$- là đáp ứng xung. Ta có:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Do hệ là bất biến nên ta có: $h_k[n] = h[n-k]$

Vậy:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ký hiệu như sau:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ta gọi đây là *tổng chập tuyến tính rời rạc (DT linear convolution).* Vậy đầu ra của hệ LTI là đầu vào chập với đáp ứng xung.

Căn cứ vào chiều dài của đáp ứng xung, ta có thể chia hệ rời rạc thành 2 loại: hệ có *đáp ứng xung dài hữu hạn FIR (Finite-duration Impulse Response)* và hệ có *đáp ứng xung dài vô hạn IIR (Infinite-duration Impulse Response)*

2.3.2 Cách tính tổng chập

Thay $m = n - k$, hay $k = n - m$, vào phương trình trên, ta được:

$$\sum_{n-m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{-m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=+\infty}^{-\infty} h[m]x[n-m] =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n]$$

Như vậy, tín hiệu vào và đáp ứng xung có thể thay thế cho nhau mà không ảnh hưởng đến đầu ra hệ thống.

Các bước tính tổng chập:

1. Viết $x[n]$ thành $x[k]$, h[n] thành h[k]
2. Đảo thời gian $h[k]$ và dịch đi n để tạo thành $h[n-k]$
3. Nhân $x[k]$ và $h[n-k]$ với mọi k.
4. Cộng $x[k]h[n-k]$ với mọi k để được $y[n]$

Lặp lại như vậy với mọi n

Hai nguyên tắc quan trọng để tính tổng chập:

1. Thực hiện đảo thời gian cho tín hiệu đơn giản hơn
2. Vẽ đồ thị

Ví dụ:

Tìm $x[n] * h[n] = y[n]$ với $x[n] = u[n+1] - u[n-3] + \delta[n]$ và $h[n] = 2\left(u[n] - u[n-3]\right)$.

Lưu ý: $N_y = N_x + N_h - 1$, với N_i là chiều dài của $i[n]$.

Ví dụ:

Tìm $x[n] * \delta[n - n_0] \Rightarrow$

Đây là phép chập một tín hiệu rời rạc với xung đơn vị, kết quả là tín hiệu rời rạc bị dịch chuyển đến vị trí của xung đơn vị.

Ví dụ:

Tìm $y[n] = x[n] * h[n]$ trong đó $x[n] = a^n u[n]$ và $h[n] = u[n]$

Làm theo 2 cách: đảo $x[n]$ và đảo $h[n]$

Ví dụ:

Tìm $y[n] = u[n] * a^n u[-n-2]$

Ngoài cách tính tổng chập bằng đồ thị, ta còn có thể tính dựa vào công thức tổng chập.

Ví dụ:

Cho $x[n]=h[n]=u[n]$. Tìm $y[n]=x[n]*h[n]$

Ta có: $$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]u[n-k]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}u[n-k] \text{ since } u[k]=0,\ k<0$$

Ta cũng có:

$$u[n-k]=0, n-k<0 \text{ or } k>n \Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n}(1)=n+1$$

Nhưng:

$$u[k]=0,\ k<0 \text{ and } u[n-k]=0,\ k>n$$

$$\Rightarrow\ 0\le k\le n \Rightarrow n\ge 0.$$

Ví dụ:

Cho $x[n]=b^n u[n]$ và $h[n]=a^n u[n+2]$, với $a\neq b$

Tìm $y[n]=x[n]*h[n]$.

Ví dụ:

Chứng minh rằng khi cho tín hiệu $x[n]=u[-n]$ đi qua hệ thống LTI có đáp ứng xung là: $h[n]=a^n u[n-2],\ |a|<1$ thì tín hiệu ra là:

$$\frac{a^2}{1-a}u[2-n]+\frac{a^n}{1-a}u[n-3]$$

Ví dụ:

Cho $x[n] = u[-n+2]$ và $h[n] = a^n u[-n]$, tìm $y[n] = x[n] * h[n]$

2.3.2 Các tính chất của tổng chập

1. Tính chất giao hoán

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

Tính chất này đã được chứng minh trong 2.3.2

2. Tính chất kết hợp

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$

Vế trái ở đây chính là tín hiệu ra trong trường hợp: x[n] là đầu vào của hệ đáp ứng xung $h_1[n]$, đầu ra $y_1[n]$ là đầu vào của hệ có đáp ứng xung $h_2[n]$. Đây chính là 2 hệ mắc nối tiếp. Vế phải ở đây chính là tín hiệu ra trong trường hợp x[n] là đầu vào của hệ có đáp ứng xung là $h_1[n]*h_2[n]$. Như vậy, *hai hệ mắc nối tiếp sẽ có đáp ứng xung là chập của hai đáp ứng xung thành phần.*

Hơn nữa, từ tính chất giao hoán ta thấy có thể đổi chỗ 2 hệ mắc nối tiếp cho nhau mà không làm thay đổi quan hệ vào-ra chung của hệ tổng quát

3. Tính chất phân phối

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

Vế trái là tín hiệu ra khi x[n] được đưa vào hệ có đáp ứng xung là $h_1[n]+h_2[n]$. Vế phải là tín hiệu ra tổng của 2 tín hiệu ra khi x[n] đồng thời được đưa vào 2 hệ có đáp ứng xung $h_1[n]$ và $h_2[n]$. Đây chính là 2 hệ mắc song song. Như vậy, *hai hệ mắc song song sẽ có đáp ứng xung là tổng của 2 đáp ứng xung thành phần*.

2.3.3 Các tính chất của hệ LTI

Quan hệ vào- ra (I/O) của hệ LTI hoàn toàn có thể được đặc trưng bởi đáp ứng xung $h[n]$. Suy ra, ta có thể biết được các tính chất của hệ LTI dựa vào $h[n]$

1. Tính có nhớ

Đáp ứng xung của hệ không nhớ chỉ có thể có dạng sau:

$$h[n]=K\delta[n].$$

2. Tính khả đảo

Hệ LTI có đáp ứng xung $h[n]$ là khả đảo nếu tồn tại một hàm $h_i[n]$ sao cho:

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

Ví dụ:

Tìm hệ đảo của hệ $h[n] = 3\delta[n+5]$

3. Tính nhân quả

Nếu ta có $h[n] = 0, n < 0$ thì

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

chỉ phụ thuộc vào các giá trị quá khứ và hiện tại của tín hiệu vào.

Ví dụ:

Xét tính nhân quả của các hệ sau đây:

(a) h[n] = u[n]

(b) $h_2[n] = u[n+2]$

4. Tính ổn định

Tính ổn định thỏa mãn nếu:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Nghĩa là đáp ứng xung phải thoả điều kiện khả tổng tuyệt đối.

Lý do ở đây là:

Với $|x[n]| \le M$ với mọi n, ta có:

$$|y[n]| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]||h[k]| \le$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} M\,|h[k]| = M\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

Vì $M<\infty$ nên để hệ ổn định BIBO ta chỉ cần:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty$$

Ví dụ:

Hệ $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ có ổn định BIBO không?

Ví dụ:

Xét các đặc điểm của các hệ sau đây:

(a) $h_1[n]=u[n]$ (an accumulator)

(b) $h_2[n]=3^n u[n]$

(c) $h_3[n]=(3)^n u[-n]$

(d) $h_4[n]=\cos(\frac{\pi}{3}n)u[n]$

(e) $h_5[n]=u[n+2]-u[n]$

2.3.4 Đáp ứng bước

Đáp ứng bước là đáp ứng của hệ đối với tác động là tín hiệu bước nhảy đơn vị, ký hiệu đáp ứng bước là s[n]

$$x[n]=u[n]$$

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

Ta có thể có $h[n]$ từ $s[n]$ như sau:

$$h[n]=s[n]-s[n-1]$$

Ví dụ:

Đáp ứng bước của hệ $h[n]=a^nu[n]$ là $s[n]=u[n]*a^nu[n]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$

Từ đáp ứng bước ta có thể tính được đáp ứng xung:

$$u[n-1]=u[n]-\delta[n].$$

Bảng sau tóm tắt về các mối quan hệ, các loại đáp ứng trong hai hệ liên tục và rời rạc

Continuous Time	Discrete Time
$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$	$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$
$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=h(t)*u(t)$	$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]=h[n]*u[n]$
$\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$	$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$
$h(t)=\frac{d}{dt}s(t)$	$h[n]=s[n]-s[n-1]$

2.4 HỆ RỜI RẠC LTI MÔ TẢ BỞI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

Nói chung, hệ rời rạc LTI có thể được đặc trưng hoàn toàn bởi tổng chập tuyến tính. Hơn nữa, công thức tổng chập cũng cung cấp cho ta một phương tiện để thực hiện hệ thống.

Với hệ FIR, để thực hiện hệ ta cần các khâu cộng, nhân và một số hữu hạn các bộ nhớ. Như vậy có thể thực hiện trực tiếp hệ FIR từ công thức tổng chập.

Tuy nhiên với hệ IIR, ta không thể thực hiện hệ thống thực tế dựa vào tổng chập được, vì nó yêu cầu một số lượng vô hạn các khâu cộng, nhân và nhớ.

Thực tế, có một cách biểu diễn hệ rời rạc khác ngoài tổng chập. Đó là biểu diễn bằng phương trình sai phân.

2.4.1 Dạng tổng quát của phương trình sai phân

Ta biết tín hiệu ra của hệ thống phụ thuộc vào tín hiệu vào và có thể phụ thuộc vào chính tín hiệu ra:

$$y[n]+a_1y[n-1]+...+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]]+...+b_Mx[n-M]$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{r=0}^{M}b_rx[n-r],\quad a_0=1$$

Đây là phương trình mô tả quan hệ vào-ra của hệ tuyến tính bất biến nên các hệ số của phương trình là hằng số và phương trình có tên gọi là *phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (Linear constant-coefficient difference equation)*

Căn cứ vào phương trình, ta phân hệ rời rạc LTI ra 2 loại:

***1.** Hệ không đệ quy:*

Bậc N = 0, tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào

***2.** Hệ đệ quy:*

Bậc N > 0, tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào và vào chính tín hiệu ra ở các thời điểm trước đó

2.4.2 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Về cơ bản, mục đích của giải phương trình là xác định tín hiệu ra $y[n],\ n \geq 0$ của hệ thống ứng với một tín hiệu vào cụ thể $x[n],\ n \geq 0$ và ứng với các điều kiện ban đầu cụ thể nào đó.

Nghiệm của phương trình là tổng của 2 phần:

$$y[n] = y_0[n] + y_p[n]$$

Trong đó $y_0[n]$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và $y_p[n]$ là nghiệm riêng.

Nghiệm tổng quát $y_0[n]$ là nghiệm của phương trình vế phải bằng 0, tức là không có tín hiệu vào. Dạng tổng quát của $y_0[n]$ là:

$$y_0[n] = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + ... + C_N\lambda_N$$

Trong đó λ_i là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_i^{n-k}$$

và C_i là các hệ số trọng số, được xác định dựa vào điều kiện đầu và tín hiệu vào.

Nghiệm riêng $y_p[n]$ là một nghiệm nào đó thỏa phương trình sai phân trên với một tín hiệu vào cụ thể $x[n],\ n \geq 0$. Nói cách khác, $y_p[n]$ là một nghiệm nào đó của phương trình:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r], \quad a_0 = 1$$

Ta tìm $y_p[n]$ có dạng giống như dạng của $x[n]$, chẳng hạn như:

$x[n]$	$y_p[n]$
A	K
$A.M^n$	$K.M^n$
$A^n.n^M$	$A^n(K_0n^M + K_1n^{M-1} + ... + K_M)$
$\begin{Bmatrix} A\cos\omega_0 n \\ A\sin\omega_0 n \end{Bmatrix}$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\sin\omega_0 n$

Ví dụ:

Tìm nghiệm tổng quát $y[n],\quad n \geq 0$ của phương trình:

$$y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

với x[n] là tín hiệu bước nhảy và y[-1] là điều kiện đầu.

Cho x[n] = 0, nghiệm tổng quát $y_0[n]$ lúc này có dạng:

$$y_0[n] = \lambda^n$$

Giải ra ta được:

$$\lambda = -a_1$$

Do vậy, $y_0[n]$ là:

$$y_0[n] = C(-a_1)^n$$

Do x[n] là tín hiệu bước nhảy đơn vị nên chọn $y_p[n]$ có dạng:

$$y_p[n] = Ku[n]$$

ở đây K là một hệ số, được xác định sao cho phương trình thỏa mãn. Thay $y_p[n]$ vào phương trình trên ta được:

$$Ku[n] + a_1 Ku[n-1] = u[n]$$

Để xác định K, ta tính với $n \geq 1$ vì trong dải đó không có số hạng nào bị triệt tiêu. Vậy,

$$K + a_1 K = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{1+a_1}$$

Như vậy, nghiệm riêng của phương trình là:

$$y_p[n] = \frac{1}{1+a_1} u[n]$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên là:

$$y[n] = y_0[n] + y_p[n] = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}, \quad n \geq 0$$

C được xác định sao cho thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Cho n = 0, từ phương trình ta có:

$$y[0] + a_1 y[-1] = 1 \Rightarrow y[0] = -a_1 y[-1] + 1$$

Mặt khác, kết hợp y[0] vừa tìm được với nghiệm tổng quát của phương trình, ta có:

$$y[0] = C + \frac{1}{1+a_1} = -a_1 y[-1] + 1 \Rightarrow C = -a_1 y[-1] + \frac{a_1}{1+a_1}$$

Thay C vào nghiệm y[n] ta được kết quả cuối cùng như sau:

$$y[n] = (-a_1)^{n+1} y[-1] + \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}, \quad n \geq 0$$

$$= y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

Ta nhận thấy nghiệm của phương trình gồm có hai phần:

1. $y_{zi}[n]$ là *đáp ứng đầu vào 0 (zero-input response)* của hệ thống. Đáp ứng này chỉ phụ thuộc vào bản chất của hệ thống và các điều kiện ban đầu. Vì vậy nó còn có tên gọi là *đáp ứng tự do (free response).*

2. $y_{zs}[n]$ phụ thuộc vào bản chất của hệ thống và vào tín hiệu vào, do đó nó còn được gọi là *đáp ứng cưỡng bức (forced response).* Nó được xác định khi không để ý đến điều kiện đầu hay là điều kiện đầu bằng 0. Khi điều kiện đầu bằng 0, ta có thể nói hệ thống ở trạng thái 0. Do vậy, $y_{zs}[n]$ còn được gọi là *đáp ứng trạng thái 0 (zero-state response)*

Qua đây ta cũng thấy: C phụ thuộc vào cả điều kiện đầu và tín hiệu vào. Như vậy, C ảnh hưởng đến cả đáp ứng đầu vào 0 và đáp ứng trạng thái 0. Nói cách khác, nếu ta muốn chỉ có đáp ứng trạng thái 0, ta giải tìm C với điều kiện đầu bằng 0.

Ta cũng thấy rằng có thể tìm nghiệm riêng của phương trình từ đáp ứng trạng thái 0:

$$y_p[n] = \lim_{n\to\infty} y_{zs}[n]$$

Ví dụ:

Tìm $y[n], \quad n \geq 0$ của hệ sau:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

với $x[n] = 4^n u[n]$ và các điều kiện đầu bằng 0.

2.4.3 Thực hiện hệ rời rạc LTI

Từ phương trình mô tả quan hệ vào-ra ta thấy để thực hiện hệ LTI, ta cần các khâu nhân, trễ và cộng. Có nhiều cách khác nhau để thực hiện hệ rời rạc, ở đây ta xét cách trực tiếp- là cách thực hiện trực tiếp dựa vào phương trình sai phân mà không qua một phép biến đổi nào

1. Dạng chuẩn tắc 1

$$y[n] + a_1 y[n-1] + ... + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]] + ... + b_M x[n-M]$$

$$\Leftrightarrow y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]] + ... + b_M x[n-M] + (-a_1) y[n-1] + ... + (-a_N) y[n-N]$$

2. Dạng chuẩn tắc 2

Để ý thấy ở dạng chuẩn tắc 1, hệ thống gồm 2 hệ mắc nối tiếp. Theo tính chất giao hoán của tổng chập thì thứ tự các hệ con mắc nối tiếp có thể thay đổi được. Do vậy, ta có thể thay đổi hệ ở dạng 1 thành: