Chương 3

PHÂN TÍCH HỆ RỜI RẠC LTI DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Phép biến đổi Z là một công cụ quan trọng trong việc phân tích hệ rời rạc LTI. Trong chương này ta sẽ tìm hiểu về phép biến đổi Z, các tính chất và ứng dụng của nó vào việc phân tích hệ rời rạc LTI. Nội dung chính chương này là:

- Phép biến đổi Z
- Phép biến đổi Z ngược
- Các tính chất của phép biến đổi Z
- Phân tích hệ rời rạc LTI dựa vào hàm truyền đạt
- Ứng dụng biến đổi Z để giải phương trình sai phân

2.1 PHÉP BIẾN ĐỔI Z (Z-Transform)

Phép biến đổi Z là bản sao rời rạc hóa của phép biến đổi Laplace.

$$\text{Laplace transform}: F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$z\text{-transform}: F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

Thật vậy, xét tín hiệu liên tục $f(t)$ và lấy mẫu nó, ta được:

$$f_s(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

Biến đổi Laplace của tín hiệu lấy mẫu (còn gọi là rời rạc) là:

$$L[f_s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

Cho $f[n] = f(nT)$ và $z = e^{sT}$, ta có:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

$$F(z)|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-sTn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

$$= L[f_s(t)]$$

Như vậy, biến đổi Z với $z = e^{sT}$ chính là biến đổi Laplace của tín hiệu rời rạc.

3.1.1 Định nghĩa phép biến đổi Z

Như vừa trình bày trên, *phép biến đổi Z hai phía (bilateral Z-Transform)* của h[n] là:

$$H(z) = Z\left[h[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Ta cũng có định nghĩa *phép biến đổi Z một phía (unilateral Z-transform)* là:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}.$$

Phép biến đổi Z hai phía được dùng cho tất cả tín hiệu, cả nhân quả và không nhân quả.

Theo định nghĩa trên ta thấy: X(z) là một chuỗi luỹ thừa vô hạn nên chỉ tồn tại đối với các giá trị z mà tại đó X(z) hội tụ. Tập các biến z mà tại đó X(z) hội tụ gọi là *miền hội tụ* của X(z)- ký hiệu là *ROC (Region of Convergence).*

Ta sẽ thấy có thể có những tín hiệu khác nhau nhưng có biến đổi Z trùng nhau. Điểm khác biệt ở đây chính là miền hội tụ.

Ta cần lưu ý đến hai khái niệm liên quan đến biến đổi Z- đó là *điểm không (zero)* và *điểm cực (pole).* Điểm không là điểm mà tại đó X(z) = 0 và điểm cực là điểm mà tại đó $X(z) = \infty$.

Do ROC là tập các z mà ở đó X(z) tồn tại nên ROC không bao giờ chứa điểm cực.

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z, vẽ ROC và biểu diễn điểm cực-không:

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \text{and} \quad x_2[n] = -(a^n)u[-n-1]$$

Ta thấy hai tín hiệu khác nhau trên có biến đổi Z trùng nhau nhưng ROC khác nhau.

3.1.2 Miền hội tụ của phép biến đổi Z

1. *x[n] lệch phải* $x[n]=0, n<n_0$

$$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

Khi $n\to\infty$, cần $(1/z)^n\to 0$ để tổng hội tụ. Như vậy, điều kiện hội tụ sẽ thỏa với các giá trị của z nằm ngoài đường tròn đi qua điểm cực xa gốc nhất, nghĩa là $|z|>r_{max}$.

2. *x[n] lệch trái* $x[n]=0, n>n_0$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]z^{-n}$$

Khi $n\to-\infty$, cần $(1/z)^n\to 0$ hay $z^{\infty}\to 0$ để tổng hội tụ. Vậy ROC là miền nằm trong đường tròn đi qua điểm cực gần gốc nhất, nghĩa là $|z|<r_{min}$

Lưu ý trong trường hợp tín hiệu $x[n]=0$ *với* $n>n_0>0$ *nhưng* $x[n_0]\neq 0$ *, ROC không chứa điểm 0.* Chẳng hạn như với $x[n]=u[-n+1]$ thì

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{1} z^{-n}=z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}$$

không hội tụ ở $z=0$ nên $z=0$ không nằm trong ROC.

3. *Tín hiệu x[n] lệch hai phía*

ROC có dạng:

$$r_1<|z|<r_2 \text{ (hình vành khăn hoặc rỗng)}$$

4. *Tín hiệu x[n] dài hữu hạn*

ROC là toàn bộ mặt phẳng z ngoại trừ $z=0$ và/hoặc $z=\infty$

$$\delta[n-1] \leftrightarrow z^{-1}, |z| > 0$$

$$\delta[n+1] \leftrightarrow z, |z| < \infty$$

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z và ROC của: $x[n] = a^{|n|}$ where $|a| < 1$.

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z và ROC của: $x[n] = 3^n u[-n-1] + 4^n u[-n-1]$.

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z và ROC của: $\frac{1}{2}\delta[n-1]+3\delta[n+1]$

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z của: $h[n]=(.5)^n u[n-1]+3^n u[-n-1]$. Hệ biểu diễn bằng đáp ứng xung như trên có ổn định BIBO không?

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z của: $x[n]=r^n \sin(bn)u[n]$

2.2 PHÉP BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC – IZT

2.2.1 Biểu thức tính IZT

Biểu thức tính IZT được xây dựng dựa trên định lý tích phân Cauchy. Định lý như sau:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1}dz = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

với C là đường cong kín bao quanh gốc tọa độ theo chiều dương và nằm trong mặt phẳng z.

Nhân 2 vế của biểu thức tính ZT với $\frac{z^{l-1}}{2\pi j}$ rồi lấy tích phân theo đường cong C, ta có:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{l-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n+l-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+l-1}dz$$

Áp dụng định lý tích phân Cauchy ta rút ra được:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{l-1}dz = x[l]$$

Thay l = n, ta có biểu thức tính IZT như sau:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

Từ đây ta thấy có thể tính IZT trực tiếp từ công thức vừa tìm được. Cách tính là dựa vào định lý về giá trị thặng dư (xem sách). Tuy nhiên, cách tính này khá phức tạp nên không được sử dụng trong thực tế.

Sau đây ta xét hai phương pháp tính IZT được dùng trong thực tế:

2.2.2 Phương pháp khai triển chuỗi lũy thừa (Power Series Expansion)

Ta có thể tính IZT bằng cách khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

Ta có:

$$\delta[n-k] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}$$

Sau đó đồng nhất các hệ số của chuỗi luỹ thừa với x[n].

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad ROC: |z| > |a|$$

Ví dụ:

Tìm IZT biết:

$$X(z) = \frac{8z - 19}{z^2 - 5z + 6}, \; |z| > 3$$

Cách khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa như trên có điểm không thuận tiện là khó/không thể biểu diễn được x[n] ở dạng tường minh.

2.2.3 Phương pháp khai triển riêng phần (Partial Fraction Expansion)

Phương pháp này tương tự như tính biến đổi Laplace ngược đã biết.

Giả sử cần tính IZT{X(z)}. Ta khai triển X(z) thành dạng sau:

$$X(z) = X_p(z) + \sum_i X_i(z)$$

Trong đó $X_p(z)$ có dạng đa thức, $X_i(z)$ có dạng phân thức với bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số.

Tuỳ điểm cực mà $X_i(z)$ có thể có các dạng như sau:

1. Nếu p_i là điểm cực đơn: $X_i(z) = \dfrac{r_i}{z - p_i}$ với $r_i = (z - p_i)X(z)\Big|_{z=p_i}$

2. Nếu p_i là điểm cực bội bậc s: $X_i(z) = \sum_{k=1}^{s} \dfrac{c_k}{(z - p_i)^k}$

với

$$c_k = \frac{1}{(s-k)!} \cdot \frac{d^{s-k}}{dz^{s-k}} \left[(z - p_i)^s X(z) \right]_{z=p_i}$$

Sau khi khai triển X(z) ta sử dụng bảng 3.1 để suy ra IZT.

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(n-m) \leftrightarrow z^{-m}$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$n^2 a^n u[n] \leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$$

$$a^n \cos(\Omega n) u[n] \leftrightarrow \frac{z(z - a\cos\Omega)}{z^2 - 2z\cos\Omega + a^2}$$

$$a^n \sin(\Omega n) u[n] \leftrightarrow \frac{az\sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + a^2}$$

$$2|K|a^n \cos(\beta n + \alpha) u[n] \leftrightarrow \frac{Kz}{z-p} + \frac{K^* z}{z-p^*}, \quad p = ae^{j\beta} \;\&\; K = |K| e^{j\alpha}$$

Bảng 3.1 *Các cặp x[n] – X(z) thông dụng*

Ví dụ:

Tìm IZT của: $X(z) = \dfrac{2z^2 - 5z}{(z-2)(z-3)}, |z| > 3$

Ta khai triển

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z - 5}{(z-2)(z-3)}$$

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}, \quad |z| > 2$$

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.5z + 0.25}$$

2.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Trong phần này, ta xét những tính chất quan trọng nhất của phép biến đổi Z.

2.3.1 Tuyến tính

$$ax[n]+by[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}aX(z)+bY(z)$$

Miền hội tụ mới phụ thuộc vào miền hội tụ của cả $X(z)$ và $Y(z)$, đó là giao của hai miền hội tụ $R_x \cap R_y$. Tuy nhiên, nếu tổ hợp aX(z) + bY(z) làm khử đi một số điểm cực của X(z) hoặc Y(z) thì miền hội tụ sẽ mở rộng ra, nên:

$$R' \supseteq R_x \cap R_y$$

2.3.2 Dịch chuyển thời gian

$$x[n-n_0]\overset{Z}{\longleftrightarrow}z^{-n_0}X(z)$$

ở đây miền hội tụ mới giống miền hội tụ R_x, có thể thêm vào hoặc bớt đi điểm gốc hay điểm vô cùng tùy n_0 dương hay âm

Ví dụ:

Tìm w[n] biết:

$$W(z)=\frac{z^{-4}}{z^2-2z-3},|z|>3$$

Tính chất tuyến tính và dịch thời gian rất hiệu quả đối với các hệ thống mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

2.3.3 Tổng chập

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)H(z)$$

ở đây miền hội tụ mới là

$$R_y \supseteq R_x \cap R_h$$

Tính chất tổng chập của biến đổi Z giúp ta tính toán tổng chập tuyến tính rời rạc một cách đơn giản hơn. Tính chất này sẽ được sử dụng rất nhiều.

Chứng minh:

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]]z^{-n}$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng, ta có:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]z^{-n}$$

Đặt $m = (n-k)$, ta có:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k][\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-(m+k)}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} \\ &= X(z)H(z) \end{aligned}$$

Miền hội tụ mới phụ thuộc vào miền hội tụ của cả $X(z)$ và $H(z)$, đó là giao của hai miền hội tụ $R_x \cap R_h$. Tuy nhiên, nếu một thừa số X(z) hoặc H(z) có điểm không, điểm không này khử điểm cực của thừa số kia thì miền hội tụ sẽ mở rộng ra, nên $R_y' \supseteq R_x \cap R_h$

Ví dụ:

Cho $h[n] = a^n u[n]$, ($|a| < 1$) và $x[n] = u[n]$. Tìm $y[n] = x[n] * h[n]$.

Nếu $x[n] = u[n-2]$ thì y[n] thay đổi như thế nào?

Ví dụ:

Tìm đầu ra $y[n]$ với đầu vào $x[n]=u[n]$ và hệ LTI có đáp ứng xung:

$$h[n]=-3^n u[-n-1].$$

2.3.4 Định lý giá trị đầu và giá trị cuối

Định lý giá trị đầu và giá trị cuối thường liên quan đến biến đổi Z một phía, nhưng chúng cũng đúng với biến đổi Z hai phía nếu tín hiệu x[n] = 0 với n < 0.

1. Định lý giá trị đầu(initial value theorem)

Biểu diễn:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = f[0]+f[1]z^{-1}+f[2]z^{-2}+\ldots,$$

Lấy giới hạn $\lim_{z\to\infty} F(z)$, ta sẽ được giá trị đầu của f[n]- đó chính là f[0]

2. Định lý giá trị cuối(final value theorem)

Nếu giá trị cuối của f[n] tồn tại thì:

$$\lim_{n\to\infty} f[n] = f[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Ví dụ:

Tìm giá trị đầu và giá trị cuối của tín hiệu $f[n]$, biết rằng:

$$F(z)=\frac{z}{z-.6}$$

2.4 PHÂN TÍCH HỆ RỜI RẠC LTI

Ta đã biết trong miền thời gian, có thể biểu diễn hệ rời rạc LTI bằng sơ đồ, tổng chập, đáp ứng xung, đáp ứng bước và phương trình sai phân .

Sau đây ta sẽ xét một cách khác - rất hiệu quả để biểu diễn hệ thống rời rạc LTI. Đó là biểu diễn bằng *hàm truyền đạt (transfer function)* hay còn gọi là *hàm hệ thống (system function)*

2.4.1 Định nghĩa hàm truyền đạt

Từ tính chất tổng chập của ZT và từ quan hệ giữa tín hiệu vào x[n], tín hiệu ra y[n] với đáp ứng xung h[n], ta có:

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

ở đây X(z) là biến đổi Z của x[n], Y(z) là biến đổi Z của y[n] và H(z) là biến đổi Z của đáp ứng xung h[n].

Dựa vào đáp ứng xung h[n], ta biết được các đặc tính của hệ thống, vậy rõ ràng là dựa vào H(z) ta cũng sẽ biết được các đặc tính của hệ thống. Nói cách khác, H(z) là biểu diễn của hệ thống trong miền z. Ta gọi H(z) là hàm truyền đạt hay hàm hệ thống.

Ta có thể xác định H(z) rất đơn giản dựa vào phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

Lấy biến đổi Z hai vế, sử dụng tính chất tuyến tính và dịch thời gian, ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

Suy ra hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Dựa vào hàm truyền đạt, ta biết được các đặc tính của hệ thống, gồm tính nhớ, tính khả đảo, tính nhân quả, tính ổn định BIBO.

2.4.2 Tính nhớ

Hệ không nhớ phải có đáp ứng xung có dạng:

$$h[n] = K\delta[n].$$

$$H(z) = K$$

Vậy hệ có nhớ có hàm truyền đạt là một hằng số.

2.4.3 Tính khả đảo

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \Rightarrow H(z)H_i(z) = 1$$

ở đây:

$h_i[n] \overset{z}{\leftrightarrow} H_i(z)$ là đảo của $h[n] \overset{z}{\leftrightarrow} H(z)$.

Ví dụ:

Tìm hệ đảo $h_i[n]$ của hệ: $h[n] = a^n u[n].$

Kiểm tra kết quả bằng cách tính tổng chập của $h[n]$ với $h_i[n]$.

Ví dụ:

Tìm hệ đảo của hệ $h[n]$ nhân quả biết:

$$H(z)=\frac{z-a}{z-b}.$$

2.4.4 Tính nhân quả

$$h[n]=0, n<0$$

$$\text{ROC: } |z|>r_{max}$$

Hệ nhân quả có miền hội tụ của H(z) nằm ngoài đường tròn đi ngang qua điểm cực xa gốc nhất.

2.4.5 Tính ổn định BIBO

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n} \Rightarrow |H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]||z^{-n}|$$

Khi ta tính trên đường tròn đơn vị (tức là |z| = 1) thì:

$$|H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$$

Như vậy, nếu hệ thống ổn định BIBO thì đường tròn đơn vị nằm trong ROC. Điều ngược lại cũng đúng.

Kết hợp với tính nhân quả vừa xét trong 2.4.4 ta có kết luận:

Hệ nhân quả sẽ ổn định BIBO nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của H(z) nằm bên trong đường tròn đơn vị trong mặt phẳng z:

$$|p_k|<1, \quad \forall k$$

Ví dụ:

Hệ có đáp ứng xung là $u[n]$ có nhân quả không? Có ổn định BIBO không?

Ví dụ:

Xét tính nhân quả và ổn định của hệ có đáp ứng xung là:

$$h[n] = (.9)^n u[n]$$

Ví dụ:

Xét tính nhân quả và ổn định BIBO của hệ có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

2.5 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

Biến đổi Z hai phía được dùng cho tín hiệu tồn tại trong khoảng $-\infty < n < \infty$. Như vậy biến đổi Z hai phía không phù hợp với loại hệ có điều kiện đầu khác 0- là loại hệ có nhiều trong thực tế.

Tín hiệu vào được kích vào hệ thống tại thời điểm n_0 nên cả tín hiệu vào và ra đều được tính với $n \geq n_0$, nhưng không có nghĩa là bằng 0 với $n < n_0$.

Sau đây ta sẽ tập trung xem xét phép biến đổi Z một phía và ứng dụng của nó vào việc giải phương trình sai phân với điều kiện đầu khác 0.

2.5.1 Phép biến đổi Z một phía và tính chất dịch thời gian

Nhắc lại định nghĩa phép biến đổi Z một phía:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Biến đổi Z một phía khác biến đổi Z hai phía ở giới hạn dưới của tổng. Do lựa chọn này mà biến đổi Z một phía có các đặc điểm sau đây:

1. Không chứa thông tin về tín hiệu với giá trị thời gian âm.

2. Biến đổi Z một phía và biến đổi Z hai phía của tín hiệu nhân quả trùng nhau.

3. Khi nói đến biến đổi Z một phía, ta không cần quan tâm đến miền hội tụ, vì miền hội tụ luôn luôn là miền ngoài của một đường tròn.

4. Tính chất dịch thời gian của biến đổi Z một phía khác biến đổi Z hai phía. Cụ thể như sau:

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x[n-m] \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-m}X(z) + z^{-m}\sum_{i=-m}^{-1} x[i]z^{-i}$$

Ta sẽ ứng dụng tính chất dịch thời gian này rất nhiều để giải phương trình sai phân trong trường hợp điều kiện đầu khác 0.

2.5.2 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

Lấy biến đổi Z một phía cho cả hai vế của phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và dịch thời gian, ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(z^{-k}Y(z) + z^{-k}\sum_{i=-k}^{-1} y[i]z^{-i} \right) = \sum_{r=0}^{M} b_r \left(z^{-m}X(z) + z^{-m}\sum_{i=-m}^{-1} x[i]z^{-i} \right)$$

ở đây x[i] và y[i] chính là các giá trị ban đầu.

Từ đây ta có thể tìm được Y(z), tính biến đổi Z ngược ta sẽ có được y[n]

Ví dụ:

Tìm $y[n], \quad n \geq 0$ cho biết y[n] là tín hiệu ra của hệ thống:

$$y[n] = 3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n]$$

ở đây $x[n] = 3^{n-2}u[n], \quad y[-2] = -\frac{4}{9}, \quad y[-1] = -\frac{1}{3}$