Chương 5

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC VÀ ỨNG DỤNG

Từ chương trước, ta đã thấy ý nghĩa của việc phân tích tần số cho tín hiệu rời rạc. Công việc này thường được thực hiện trên các bộ xử lý tín hiệu số DSP. Để thực hiện phân tích tần số, ta phải chuyển tín hiệu trong miền thời gian thành biểu diễn tương đương trong miền tần số. Ta đã biết biểu diễn đó là biến đổi Fourier $X(\Omega)$ của tín hiệu x[n]. Tuy nhiên, $X(\Omega)$ là một hàm liên tục theo tần số và do đó, nó không phù hợp cho tính toán thực tế. Hơn nữa, tín hiệu đưa vào tính DTFT là tín hiệu dài vô hạn, trong khi thực tế ta chỉ có tín hiệu dài hữu hạn, ví dụ như một bức ảnh, một đoạn tiếng nói…

Trong chương này, ta sẽ xét một phép biến đổi mới khắc phục được các khuyết điểm trên của DTFT. Đó là *phép biến đổi Fourier rời rạc DFT (Discrete Fourier Transform).* Đây là một công cụ tính toán rất mạnh để thực hiện phân tích tần số cho tín hiệu rời rạc trong thực tế.

Nội dung chính chương này gồm:

- DTFT của tín hiệu rời rạc tuần hoàn. Đây là phép biến đổi trung gian để dẫn dắt đến DFT
- DFT thuận và ngược
- Các tính chất của DFT
- Một số ứng dụng của DFT
- Thuật toán tính nhanh DFT, gọi là FFT

5.1 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC TUẦN HOÀN

5.1.1 Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Nhắc lại khai triển chuỗi Fourier cho *tín hiệu liên tục tuần hoàn*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{synthesis equation}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{analysis equation}$$

Tương tự, ta có khai triển chuỗi Fourier cho *tín hiệu rời rạc tuần hoàn* (còn được gọi là *chuỗi Fourier rời rạc DFS- Discrete Fourier Serie*) như sau:

$$x[n] = \sum_{k\in<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \text{synthesis equation}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \qquad \text{analysis equation}$$

Khác với khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu liên tục tuần hoàn, phép lấy tích phân bây giờ được thay bằng một tổng. Và có điểm khác quan trọng nữa là tổng ở đây là tổng hữu hạn, lấy trong một khoảng bằng một chu kỳ của tín hiệu. Lý do là:

$$e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}.e^{jk2\pi n} = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j(k+N)\Omega_0 n}$$

5.1.2 Biểu thức tính biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Ta có hai cách để xây dựng biểu thức tính biến dổi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn như sau:

1. *Cách thứ nhất:*

Ta bắt đầu từ tín hiệu liên tục tuần hoàn. Ta có:

$$e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Nên:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega-k\omega_0)$$

Vậy, phổ của tín hiệu tuần hoàn là *phổ vạch (line spectrum),* có vố số vạch phổ với chiều cao là $2\pi a_k$ nằm cách đều nhau những khoảng là ω_0 trên trục tần số ω

Bây giờ chuyển sang tìm biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

Trước hết, ta tìm DTFT của $e^{j\Omega_0 n}$. Ta có thể đoán là DTFT của $e^{j\Omega_0 n}$ cũng có dạng xung tương tự như DTFT của $e^{j\omega_0 t}$, nhưng khác ở điểm DTFT này tuần hoàn với chu kỳ 2π:

$$DT: e^{j\Omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0+2\pi l)$$

Ta có thể kiểm tra lại điều này bằng cách lấy DTFT ngược:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0-\pi}^{\Omega_0+\pi} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= e^{j\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Kết hợp kết quả DTFT của $e^{j\Omega_0 n}$ với khai triển chuỗi Fourier của x[n], tương tự như với tín hiệu liên tục, ta được:

$$\begin{aligned} x[n] &\overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi\sum_{k\in<N>}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\Omega-k\Omega_0+2\pi l) \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\Omega-k\Omega_0) \text{ (do } a_k \text{ tuần hoàn)} \end{aligned}$$

Với $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, ta có:

$$x[n] \text{ periodic with period } N \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

với a_k là hệ số của chuỗi Fourier, tổng được lấy trong một chu kỳ của tín hiệu.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in <N>} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

Ví dụ:

Tìm DTFT của dãy xung rời rạc sau:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN].$$

Cuối cùng ta có:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) = P(\Omega)$$

Như vậy, DTFT của dãy xung rời rạc là tập vô số xung rời rạc có chiều cao là $\frac{2\pi}{N}$ và có khoảng cách giữa hai xung cạnh nhau là $\frac{2\pi}{N}$

2. *Cách thứ hai:*

Ta có thể rút ra kết quả DTFT của tín hiệu rời rạc tuần hoàn như trên nhưng bằng cách khác.

Ta xét một chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn $x[n]$, ký hiệu là: $x_0[n]$:

$$x_0[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Sau đó tính DTFT của $x_0[n]$

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x_0[n]e^{-jn\Omega}$$

Viết lại $x[n]$ dưới dạng tổng của vô số chu kỳ $x_0[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0[n] * \delta[n-kN] = x_0[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$

Theo tính chất chập tuyến tính ta có:

$$x[n] = x_0[n] * p[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_0(\Omega)P(\Omega) = X(\Omega)$$

Thay $P(\Omega)$ vừa tìm được trong ví dụ trên vào biểu thức này, ta được:

$$X(\Omega) = X_0(\Omega)\left(\frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})\right)$$

$$= \frac{2\pi}{N}\sum_k X_0(\frac{2\pi k}{N})\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \text{ (t/c nhân với một xung)}$$

ở đây $X_0(\frac{2\pi k}{N})$ có N giá trị phân biệt, nghĩa là $k = 0,1,2,...,N-1$.

Biểu thức tính DTFT ngược là:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N})\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})]e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N})\int_0^{2\pi}\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_0(\frac{2\pi k}{N})e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Nếu so sánh với công thức chuỗi Fourier ở trên, ta được:

$$a_k = \frac{1}{N}X_0\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \text{ với } k = 0,1,2,...,N-1$$

Tóm lại, ta có:

$$x[n] = x_0[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_0[n] e^{-j\Omega n}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N}) \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_0(\frac{2\pi k}{N}) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X_0(\frac{2\pi k}{N})$$

Vậy, để tính DTFT $X(\Omega)$ của tín hiệu $x[n]$ rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N, ta tiến hành theo các bước sau đây:

1. Bắt đầu với một chu kỳ $x_0[n]$ của tín hiệu $x[n]$, lưu ý $x_0[n]$ không tuần hoàn

2. Tìm DTFT của tín hiệu không tuần hoàn trên:

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n] e^{-j\Omega n}$$

3. Tính $X_0(\Omega)$ tại các giá trị $\Omega = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1,...,N-1$

4. Từ đây có DTFT của tín hiệu tuần hoàn theo như công thức vừa tìm:

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N}) \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

Ví dụ:

Cho $x[n] = 1$. Tìm $X(\Omega)$

Ví dụ:

Cho $x_0[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-3]$. Giả sử $N = 4$. Tìm $X_0(\Omega)$ và $X(\Omega)$ và xác định 4 giá trị phân biệt của $X_0(\frac{2\pi k}{N})$.

Ví dụ:

Cho tín hiệu tuần hoàn $x[n]$ với chu kỳ $N = 3$ và một chu kỳ là:

$$x_0[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2].$$

Tìm $X_0(\Omega)$ và $X(\Omega)$. Kiểm tra kết quả bằng cách tính DTFT ngược để khôi phục lại $x[n]$.

Ví dụ:

Cho tín hiệu tuần hoàn $y[n]$ với chu kỳ $N=3$ và một chu kỳ là:

$$y_0[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2].$$

Tìm $Y_0(\Omega)$ và $Y(\Omega)$. Kiểm tra kết quả bằng cách tính DTFT ngược để khôi phục lại $y[n]$.

5.2 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC DÀI HỮU HẠN

5.2.1 Biểu thức tính biến đổi Fourier rời rạc thuận của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Trong mục trên, ta xét một chu kỳ $x_0[n]$ của tín hiệu tuần hoàn $x[n]$. Ta có thể xem phần chu kỳ này có được bằng cách *lấy cửa số (windowing)* tín hiệu dài vô hạn $x[n]$:

$$x_0[n]=x[n]w_R[n]$$

Với $w_R[n]$ là cửa số chữ nhật (ở đây nó còn được gọi là cửa sổ DFT):

$$w_R[n]=\begin{cases}1, & n=0,1,\cdots,N-1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$x_0[n]=x[n]w_R[n]$ chỉ là các mẫu của $x[n]$ nằm giữa $n=0$ và $n=N-1$. (không quan tâm đến các mẫu nằm ngoài cửa sổ). Ta có thể tính DTFT của $x_0[n]$ như sau:

$$X_0(\Omega)=\text{DTFT}(x_0[n])=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]w_R[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\Omega n}$$

Vậy,

$$X_0(\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}x_0[n]e^{-j\Omega n}$$

Bây giờ ta tiến hành lấy mẫu $X_0(\Omega)$ để lưu trữ trên máy tính. Do $X_0(\Omega)$ liên tục và tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ cần các mẫu ở trong dải tần số cơ bản. Để thuận tiện, ta lấy N mẫu

cách đều nhau trong đoạn $[0,\ 2\pi)$:

$$0,\ 2\pi/\mathrm{N},\ 4\pi/\mathrm{N},\ \ldots,\ (\mathrm{N}-1)2\pi/\mathrm{N}$$

Nói cách khác, các điểm đó là:

$$\Omega = \tfrac{2\pi k}{N}, k = 0,1,...,N-1$$

Ta định nghĩa *phép biến đổi Fourier rời rạc DFT (Discrete Fourier Transform)* như sau:

$$X[k] = X_0(\frac{2\pi k}{N}) \text{ với } \mathrm{k} = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mathrm{N}-1$$

X[k] được gọi là *phổ rời rạc (discrete spectrum)* của tín hiệu rời rạc.

Lưu ý 1:

X[k] là hàm phức theo biến nguyên, có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathrm{X[k]} = |\,\mathrm{X[k]}\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta[\mathrm{k}]}$$

ở đây |X[k]| là phổ biên độ và $\theta[\mathrm{k}]$ phổ pha.

Lưu ý 2:

Độ phân giải (resolution) của phổ rời rạc *là* $\tfrac{2\pi}{N}$ vì ta đã lấy mẫu phổ liên tục tại các điểm cách nhau $\tfrac{2\pi}{N}$ trong miền tần số, nghĩa là: $\Delta\Omega = \tfrac{2\pi}{N}$.

Ta cũng có thể biểu diễn độ phân giải theo tần số tương tự f. Ta nhớ lại quan hệ:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f_s}}$$

Do đó:

$$\Delta\mathrm{f} = \frac{\mathrm{f_s}}{\mathrm{N}}$$

Lưu ý 3:

Nếu ta xem xét các mẫu của $X_0(\Omega)$ là $\tfrac{2\pi k}{N}$ với $k = -\infty$ đến ∞ thì ta sẽ thấy *DFT chính là một chu kỳ của DFS*, nhưng DFT hiệu quả hơn nhiều so với DFS bởi vì số mẫu của DFT là hữu hạn:

$$X[k] = X_0(\Omega) \mid \Omega = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1,\cdots,N-1$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} \mid_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}, k=0,1,\cdots,N-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, k=0,1,\cdots,N-1$$

Để cho gọn, ta ký hiệu:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Khi không cần để ý đến N, ta có thể viết đơn giản W thay cho W_N

Vậy,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, k = 0,1,\cdots,N-1$$

là DFT của dãy $x_0[n]$. lấy cửa sổ từ x[n]

Ví dụ:

Tính DFT của $x[n] = u[n] - u[n-N]$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (e^{\frac{-j2\pi k}{N}})^n = \sum_{n=0}^{N-1} W^{kn}$$

Suy ra DFT của $x[n] = 1, n = 0,1,\cdots,7.$

Ví dụ:

Cho $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1,...,7 \end{cases}$. Tìm $X[k], k = 0,1,...,7$

Ví dụ:

Cho $y[n]=\delta[n-2]$ và $N=8$. Tìm $Y[k]$

Ví dụ:

Cho $x[n]=cW_N^{-pn}, n=0,1,...,N-1$, với p là một số nguyên $p\in[0,1,...,N-1]$ và $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ Tìm DFT của $x[n]$.

5.2.2 Biểu thức tính biến đổi Fourier rời rạc ngược

Trong mục này, ta sẽ đi thiết lập công thức khôi phục $x[n]$ từ $X[k]$. Sự khôi phục này được gọi là tổng hợp hay *DFT ngược (IDFT)*

Từ biểu thức tính DTFT ngược được thiết lập trong mục 5.2.1 và do tính tương hỗ giữa miền thời gian và tần số, ta có thể suy ra biểu thức tính IDFT như sau:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}, n=0,1,...,N-1$$

Sau đây ta sẽ chứng minh điều này đúng:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]W_N^{kl}W_N^{-kn}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)}$$

Ta có

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)} = \begin{cases} N, & l = n \\ 0, & l \neq n \end{cases}$$

Thay kết quả này vào x[n] ta có được biểu thức tính IDFT trên là đúng

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]N\delta[n-l]$$
$$= \frac{1}{N}(Nx[n]) = x[n]$$

Ví dụ:

Tìm IDFT của $X[k] = 1, k = 0,1,...,7$.

Ví dụ:

Cho $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3]$ và $N = 4$, tìm $X[k]$.

Ví dụ:

Cho $X[k] = 2\delta[k] + 2\delta[k-2]$ và $N = 4$, tìm $x[n]$.

5.2.3 Chọn số mẫu tần số N

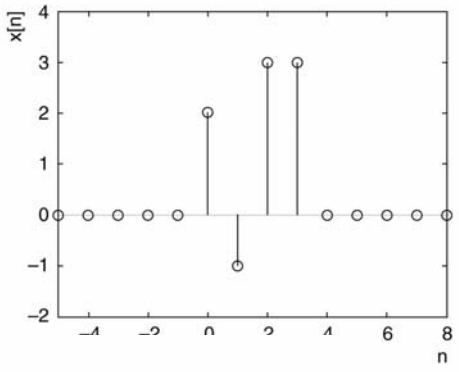
Qua mục 5.2.1 ta thấy biểu thức tính DFT được thành lập từ việc lấy mẫu DTFT với số mẫu là N. Số mẫu N này cũng chính là số mẫu của tín hiệu rời rạc trong miền thời gian hay là độ dài của cửa sổ DFT, nói ngắn gọn là số mẫu tần số bằng số mẫu thời gian.

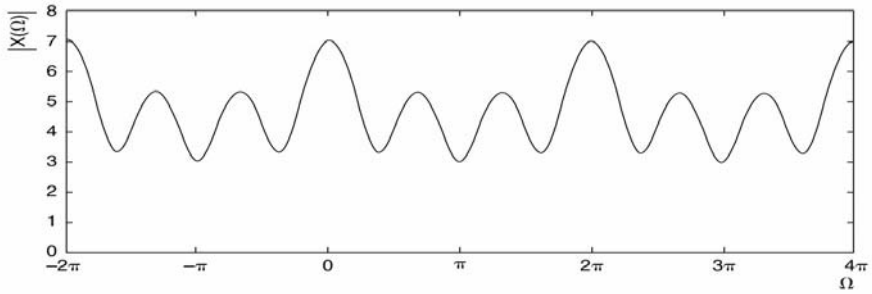
Ví dụ:

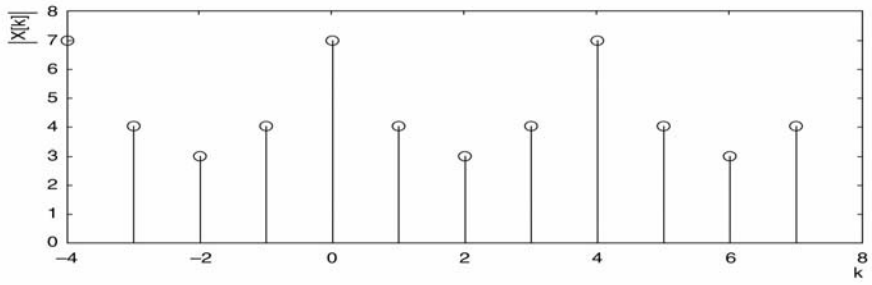
Cho tín hiệu x[n] như hình bên.

Tính rồi vẽ hai loại phổ biên độ $|X(\Omega)|$ và $|X[k]|$ trên đồ thị.

Xem đồ thị ta thấy rõ ràng rằng: các mẫu $|X[k]|$ bằng với $|X(\Omega)|$ tại cùng tần số.







Việc chọn N ảnh hưởng đến độ phân giải của phổ rời rạc. Chọn N càng lớn, độ phân giải càng tốt, nghĩa là khoảng cách giữa hai vạch phổ cạnh nhau X[k] và X[k+1] càng nhỏ, nghĩa là đường bao của phổ rời rạc X[k] càng gần với hình ảnh của phổ liên tục $|X(\Omega)|$.

Để việc tăng N không làm ảnh hưởng đến kết quả, ta kéo dài tín hiệu trong miền thời gian ra bằng cách *chèn thêm các mẫu bằng 0 (zero-padding)* vào phía cuối của tín hiệu.

Ví dụ:

Cho $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

Tìm X[k] với N như sau:

(a) *N = 5.*

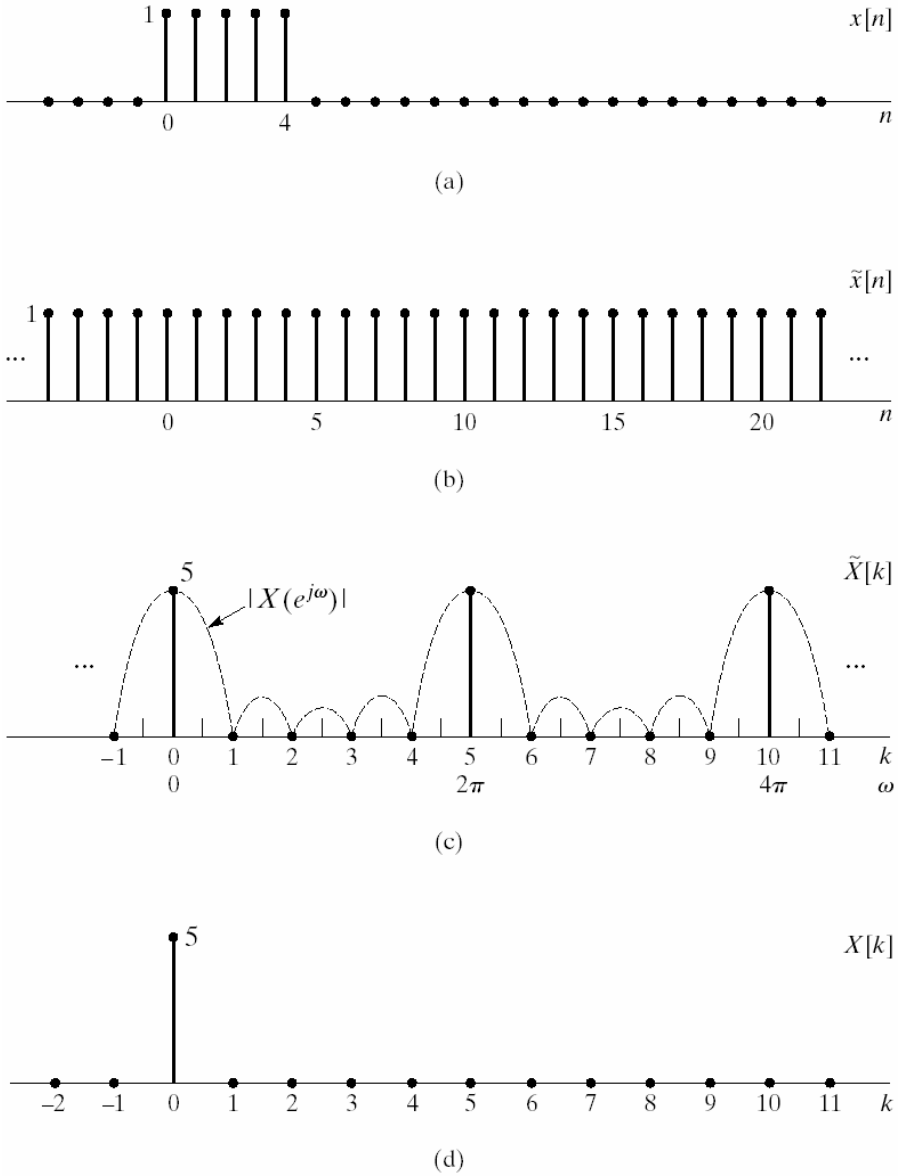


Figure 8.10 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 5$. (c) Fourier series coefficients $\tilde{X}[k]$ for $\tilde{x}[n]$. To emphasize that the Fourier series coefficients are samples of the Fourier transform, $|X(e^{j\omega})|$ is also shown. (d) DFT of $x[n]$.

(b) *N = 10*

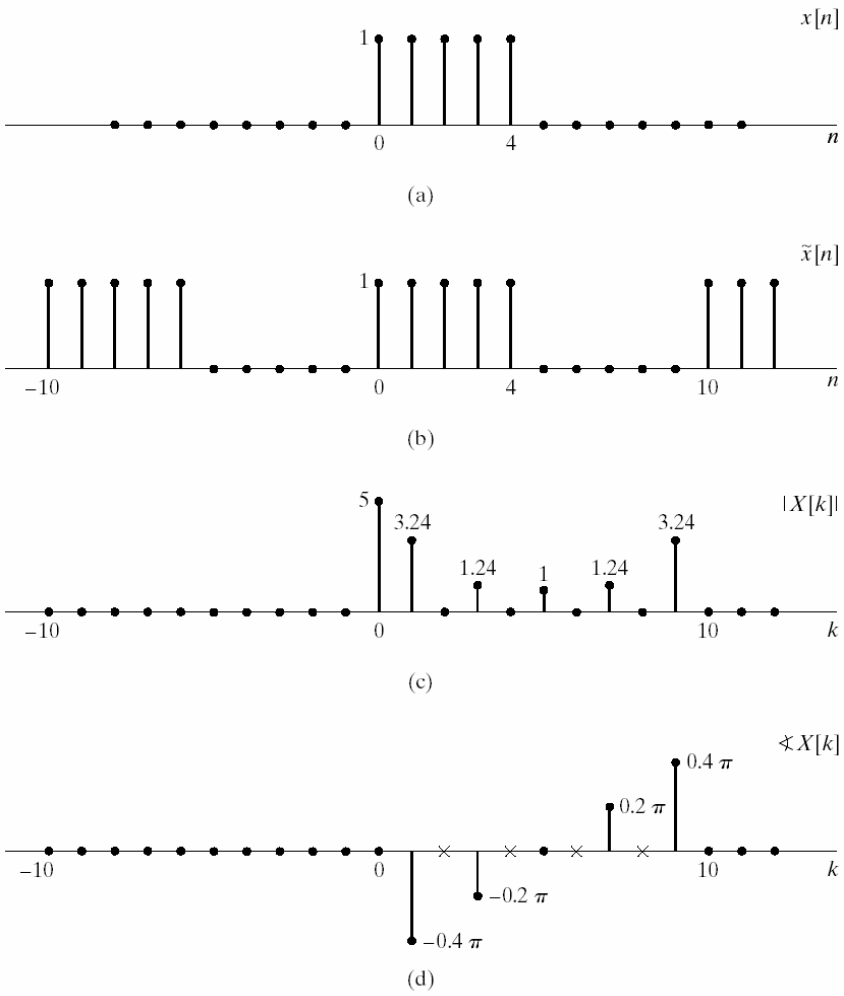


Figure 8.11 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 10$. (c) DFT magnitude. (d) DFT phase. (x's indicate indeterminate values.)

5.2.4 Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc

Hầu hết các tính chất của DFT tương tự như các tính chất của DTFT, nhưng có vài điểm khác nhau. Điểm khác nhau đó là do DFT chính là một chu kỳ trích ra từ dãy DFS tuần hoàn với chu kỳ N.

Bây giờ ta thay đổi ký hiệu, ký hiệu $\tilde{x}[n]$ là dãy tuần hoàn chu kỳ N, $x[n]$ là một chu kỳ trích ra từ $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$$

1. *Dịch vòng*

Nếu

$$x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$$

thì

$$\mathrm{x[n-m]} \overset{\mathrm{DFT}}{\leftrightarrow} \mathrm{W}^{\mathrm{km}}\mathrm{X[k]} \text{ với } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Ví dụ:

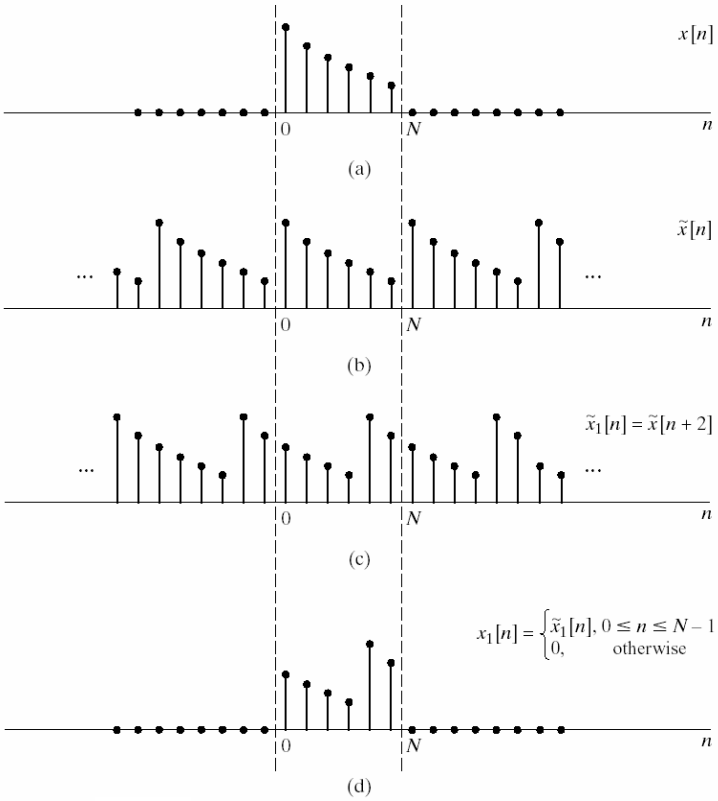


Figure ular shift of a finite-length sequence; i.e., the effect in the time domain of multiplying the DFT of the sequence by a linear phase factor.

Dịch vòng đi *m* mẫu sẽ cho kết quả trùng với dich vòng đi (*m* mod *N) mẫu*.

2. *Tổng chập vòng*

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{DFT,N}{\leftrightarrow} X_1[k]X_2[k]$$

ở đây:

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{p=0}^{N-1} x_1[p]x_2[n-p]_{\text{mod } N}$$

Dấu $\otimes$ là ký hiệu tổng chập vòng.

Nhắc lại công thức tổng chập tuyến tính:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_1[p]x_2[n-p]$$

Thoạt nhìn, ta thấy biểu thức tính tổng chập vòng rất giống tổng chập tuyến tính. Tuy nhiên, hai phép chập đó khác nhau ở những điểm sau đây:

- Phép chập vòng chỉ áp dụng cho hai dãy dài hữu hạn và bằng nhau, kết quả cũng là một dãy cùng chiều dài, nghĩa là $x_1[n], x_2[n]$, and $y[n]$ đều có chiều dài là N. Trong khi đó, phép chập tuyến tính áp dụng cho hai dãy có chiều dài bất kỳ: nếu $x_1[n]$ dài N_{x_1}, $x_2[n]$ dài N_{x_1} thì $y[n]$ dài
- Phép dịch trong tổng chập vòng là phép dịch vòng, khác với phép dịch trong tổng chập tuyến tính là phép dịch tuyến tính.

Vì những điểm khác nhau trên nên *kết quả của tổng chập vòng và tổng chập tuyến tính của cùng hai dãy có thể không trùng nhau.* Tuy nhiên, ta có cách làm cho hai kết quả đó trùng nhau như sau:

- Chuyển tổng chập tuyến tính sang miền tần số:

$$Y(\Omega) = X_1(\Omega).X_2(\Omega)$$

- Lấy mẫu $Y(\Omega)$ với số mẫu là $N \geq N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1$, ta được:

$$Y[k] = X[k].H[k]$$

- Tính DFT ngược, ta được:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

ở đây chiều dài của y[n] , x[n] và h[n] là:

$$N \geq N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1$$

Như vậy, bằng cách kéo dài các tín hiệu $x_1[n]$ và $x_2[n]$ ra đến chiều dài $N \geq N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1$ rồi lấy chập vòng, ta được hai kết quả của tổng chập vòng và chập tuyến tính là trùng nhau:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$$

Ví dụ:

Tìm $x_1[n] \otimes x_2[n] = z[n]$, với $x_1[n] = [1,2,0,0]$, $x_2[n] = [1,1,0,0]$ và $N = 4$.

Kết quả này có trùng với tổng chập tuyến tính không?

Ví dụ:

Tìm $y[n] = x[n] \otimes x[n]$, với $x[n] = [1,0,1,1]$ trong hai trường hợp:

(a) N = 4

(b) N = 8

N bằng bao nhiêu là đủ để tổng chập vòng trùng với tổng chập tuyến tính?

5.3 MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA DFT

Phần này sẽ giới thiệu sơ lược về một số ứng dụng của DFT trong thực tế

5.3.1 Phân tích phổ tín hiệu

Trong chương trước, ta đã biết được ý nghĩa của phổ trong việc phân tích tín hiệu, từ phổ của tín hiệu ta biết được một số thông tin cần thiết.

Để tìm phổ của tín hiệu (cả liên tục và rời rạc), ta cần phải biết giá trị của tín hiệu tại tất cả các thời điểm. Tuy nhiên trong thực tế, do ta chỉ quan sát được tín hiệu trong một khoảng thời gian hữu hạn nên phổ tính được chỉ là xấp xỉ của phổ chính xác. DFT được ứng dụng rất hiệu quả trong việc tính toán phổ xấp xỉ này.

Trong thực tế, nếu tín hiệu cần phân tích là tín hiệu liên tục, trước hết ta cho tín hiệu đó đi qua một bộ lọc chống chồng phổ rồi lấy mẫu với tần số $F_s \geq 2B$, với B là băng thông của tín hiệu sau khi lọc. Như vậy, tần số cao nhất chứa trong tín hiệu rời rạc là Fs/2. Sau đó, ta phải giới hạn chiều dài của tín hiệu trong khoảng thời gian $T_0 = LT$, với L là số mẫu và T là khoảng cách giữa hai mẫu. Cuối cùng, ta tính DFT của tín hiệu rời rạc L mẫu. Như đã trình bày trên, muốn tăng độ phân giải của phổ rời rạc, ta tăng chiều dài của DFT bằng cách bù thêm số 0 vào cuối tín hiệu rời rạc trước khi tính DFT.

Ví dụ sau đây minh họa một ứng dụng của DFT trong việc phân tích phổ tín hiệu điện tâm đồ (ECG):

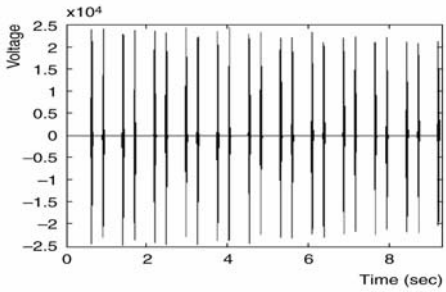
Hình vẽ (a) là đồ thị của 11 nhịp tim của một bệnh nhân. 11 nhịp tim này xuất hiện trong khoảng thời gian 9 giây, tương đương với 11/9 = 1.22 nhịp trong một giây, hay 73 nhịp trong một phút.

Hình (b) là chi tiết nửa đầu của nhịp tim thứ tư.

Hình (c) là một đoạn phổ biên độ DFT có được sau khi lấy mẫu đoạn 11 nhịp tim (a) với tần số lấy mẫu là 8 kHz. Nhìn (c) ta thấy có hai điểm biên độ cao nhất xuất hiện ở tần số 88 Hz

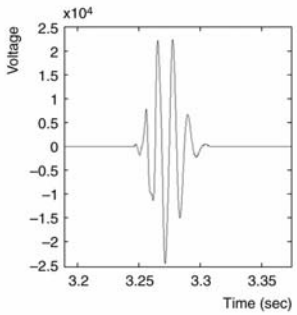
và 235 Hz.

Để tìm hiểu phổ kỹ hơn, ta tính DFT của tín hiệu ở hình (b)- phổ này thể hiện ở hình (d), ở đây ta thấy rõ hai điểm biên độ cao nhất ở tần số 88 Hz và 235 Hz bên trong mỗi nhịp tim. Tuy nhiên, ta không thấy tần số lặp lại nhịp tim là 1.22 Hz trong DFT hình (c).

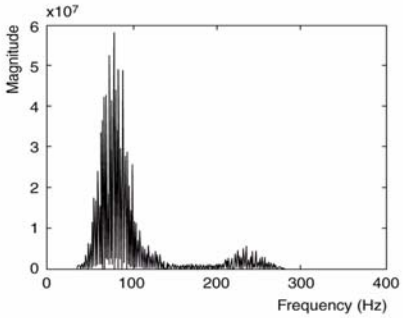


(a) Eleven Heartbeats

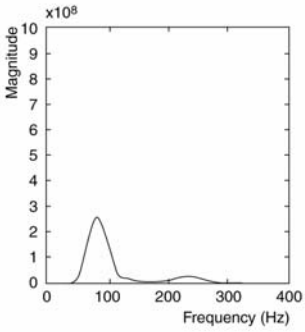
Hình (e) giải thích rõ hơn điều này. Nó là phiên bản mở rộng của các đỉnh nhọn trong dải tần từ 60 Hz đến 100 Hz. Trong khi tần số 1.22 Hz quá nhỏ nên không thấy rõ trong hình (c) thì trong hình (e) này, ta thấy rõ các hài của tần số 1.22 Hz và thấy rõ khoảng cách giữa hai đỉnh nhọn là 1.22 Hz.



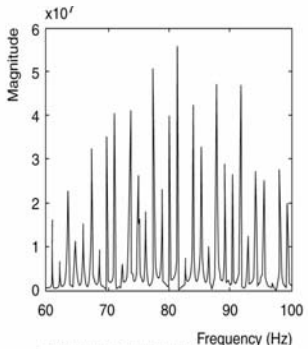
(b) Heartbeat Detail



(a) Magnitude Spectrum of Eleven Heartbeats



(b) Magnitude Spectrum of Heartbeat Detail



5.3.2 Tính tín hiệu ra hệ thống rời rạc LTI

Tín hiệu ra hệ thống rời rạc LTI được tính bằng cách chập tín hiệu vào với đáp ứng xung của hệ thống:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Ta có hai cách để tính tổng chập này: một là tính trực tiếp, hai là tính thông qua tổng chập vòng như phân tích trong mục 5.2.4. Cách tính qua tổng chập vòng sẽ có lợi hơn về mặt thời gian. Lý do là tổng chập vòng có thể tính thông qua DFT, mà DFT có thể được tính nhanh nhờ thuật toán tính nhanh FFT.

Để tính y[n], ta thực hiện theo các bước sau đây:

- Kéo dài x[n] đến độ dài $N = N_x + N_h - 1$

- Kéo dài h[n] đến độ dài $N = N_x + N_h - 1$
- Tính DFT của x[n] N mẫu, ta được X[k]
- Tính DFT của h[n] N mẫu, ta được H[k]
- Nhân X[k] với H[k], ta được Y[k]:

$$Y[k] = X[k].H[k]$$

- Tính DFT ngược của Y[k], ta được y[n]

Việc tính DFT và DFT ngược được thực hiện nhờ một thuật toán tính nhanh DFT, gọi là *FFT (Fast Fourier Transform)*. Phần sau sẽ trình bày về thuật toán FFT.

5.4 TÍNH NHANH DFT BẰNG THUẬT TOÁN FFT

DFT được ứng dụng rộng rãi trong xử lý tín hiệu rời rạc/ số nên nhiều nhà toán học, kỹ sư… đã rất quan tâm đến việc rút ngắn thời gian tính toán. Năm 1965, Cooley và Tukey đã tìm ra thuật toán tính DFT một cách hiệu quả gọi là thuật toán FFT. Cần lưu ý FFT không phải là một phép biến đổi mà là một thuật toán tính DFT nhanh và gọn hơn.

Để đánh giá hiệu quả của thuật toán, ta sử dụng số phép tính nhân và cộng phức. Số phép nhân và cộng phức liên quan trực tiếp đến tốc độ tính toán khi thuật toán được thực hiện trên các máy tính hay là các bộ xử lý chuyên dụng.

5.4.1 Hiệu quả tính toán của FFT

Công thức tính DFT của dãy dài N:

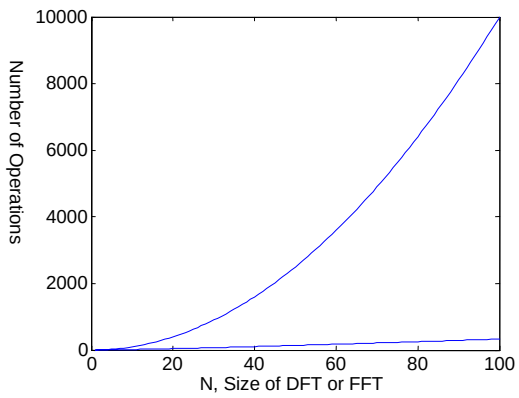
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{kn}$$

Qua đây ta thấy để tính mỗi giá trị DFT ta cần N phép nhân và cộng phức. Để tính toàn bộ DFT ta cần N^2 phép nhân và cộng phức.

Tuy nhiên, nếu tính DFT nhờ thuật toán FFT thì số phép nhân và cộng phức giảm xuống chỉ còn $\frac{N}{2}\log_2 N$.

Ví dụ như $N = 2^{10} = 1024$ thì nếu tính trực tiếp DFT cần $N^2 = 2^{20} = 10^6$ phép nhân và cộng phức, trong khi tính qua FFT thì số phép nhân và cộng phức giảm xuống chỉ còn $\frac{N}{2}\log_2 N =$ 5120. Số phép tính giảm đi gần 200 lần!

Hình sau cho thấy rõ hiệu quả của thuật toán FFT:



Có nhiều thuật toán FFT khác nhau bao gồm FFT phân chia theo thời gian và FFT phân chia theo tần số. Trong phần này ta tập trung vào thuật toán FFT cơ số 2 ($N = 2^i$ where i is an integer) phân chia theo thời gian.

5.4.2 Nguyên tắc của FFT

Nguyên tắc cơ bản mà các thuật toán FFT đều dựa vào là phân chia DFT N mẫu thành các DFT nhỏ hơn một cách liên tục:

Với $N = 2^i$, đầu tiên ta phân chia DFT N mẫu thành các DFT $\frac{N}{2}$ mẫu, sau đó phân chia DFT $\frac{N}{2}$ mẫu thành DFT $\frac{N}{4}$ mẫu và cứ tiếp tục như thế cho đến khi được các DFT dài N = 2. Việc tính DFT nhỏ hơn rõ ràng sẽ cần ít phép tính nhân và cộng phức hơn.

Trước tiên, chia $x[n]$ thành các dãy con chẵn và lẻ:

$$X[k] = \sum_{n\text{even}} x[n]W^{kn} + \sum_{n\text{odd}} x[n]W^{kn}$$

Đặt $n = 2m$ với n chẵn và $n = 2m+1$ với n lẻ:

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]W^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]W^{k(2m+1)} =$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m](W^2)^{mk} + W^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1](W^2)^{mk} =$$

$$X[k] = X_e[k] + W^k X_o[k] = G[k] + W^k H[k]$$

$X_e[k]$ và $X_o[k]$ là DFT $\frac{N}{2}$ mẫu.

Tiếp theo chia dãy con $\frac{N}{2}$ mẫu là x[2m] làm đôi bằng cách đặt $m = 2p$:

$$X_e[k] = \sum_{p=0}^{\frac{N}{4}-1} x[4p](W^4)^{kp} + W^{2k} \sum_{p=0}^{\frac{N}{4}-1} x[4p+2](W^4)^{kp} =$$

Thực hiện tương tự như vậy cho dãy con x[2m+1]

Ví dụ: N = 8

Quá trình phân chia DFT 8 mẫu thành các DFT nhỏ hơn được minh họa trên lưu đồ.

Đầu tiên, chia x[n] thành 2 dãy con, dãy thứ nhất là dãy chẵn x[0], x[2], x[4], x[6] và dãy thứ hai là dãy lẻ x[1], x[3], x[5], x[7].

Tiếp theo, chia dãy chẵn thành 2 dãy con, dãy thứ nhất là x[0], x[4] và dãy thứ hai là x[2], x[6].

Tương tự, dãy lẻ được chia thành 2 dãy con, là dãy x[1], x[5] và dãy x[3], x[7].

Các DFT 2 mẫu được tính đơn giản như sau:

$$G[k] = \sum_{n=0}^{1} g[n]W^{nk}, \quad 0 \le k \le 1, \quad W = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow G[0] = g[0]W^{0.0} + g[1]W^{1.0} = g[0] + g[1] \qquad \text{(chỉ cần phép cộng và trừ)}$$

$$G[1] = g[0]W^{0.1} + g[1]W^{1.1} = g[0] - g[1]$$

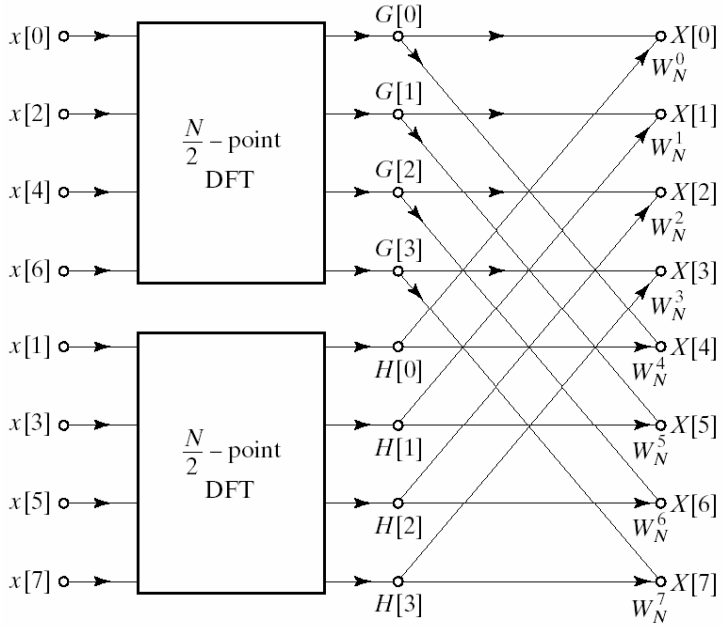
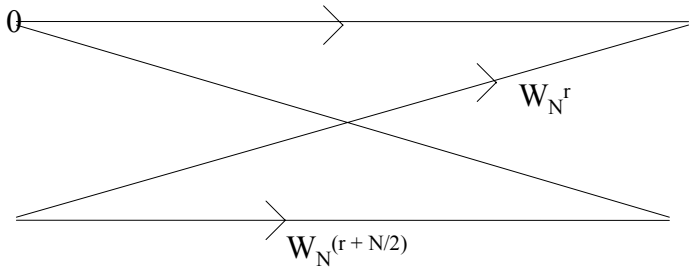


Figure 9.3 Flow graph of the decimation-in-time decomposition of an N-point DFT computation into two $(N/2)$-point DFT computations $(N = 8)$.

FFT cơ sở:

A "Butterfly"



Lưu ý: $W_N^{(r + N/2)} = W_N^{N/2} W_N^r = -1 W_N^r = - W_N^r$, do đó có thể vẽ lại lưu đồ FFT đơn giản như sau:

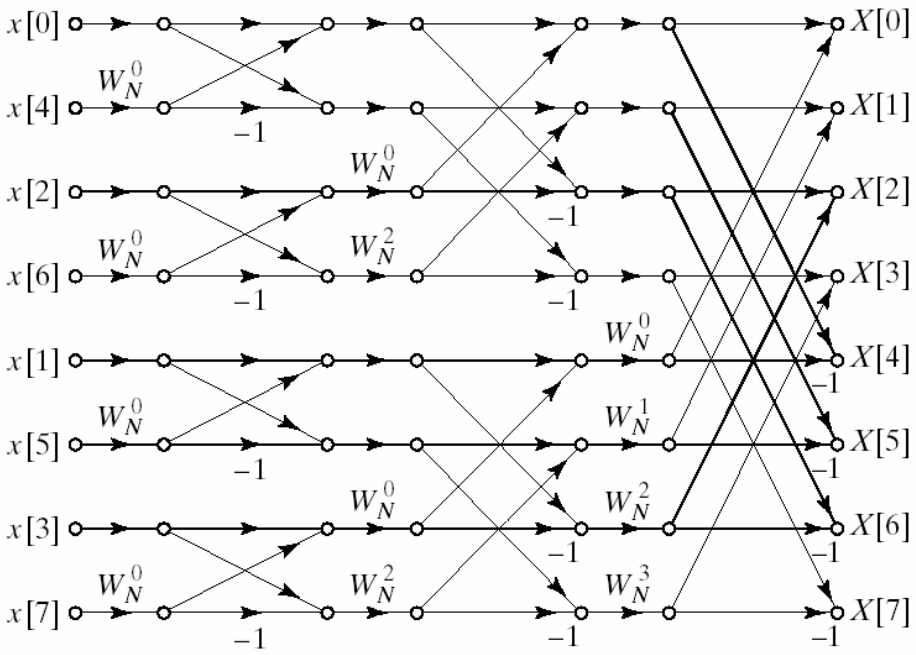


Figure 9.10 Flow graph of 8-point DFT using the butterfly computation of Figure 9.9.

Phụ lục 1

Summary: The Common Types of Fourier Transforms

	Continuous in Time $x(t)$ = Aperiodic in Frequency	Discrete in Time $x[n]$ = Periodic in Frequency
Periodic in Time, = Discrete in Frequency	**Fourier Series (FS):** $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	**Discrete Fourier Series (DFS) and Discrete Fourier Transform (DFT):** $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1$ $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, 0 \le n \le N-1$ where $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.
Aperiodic in Time, = Continuous in Frequency	**Fourier Transform (FT):** $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}dt$	**Discrete-Time Fourier Transform (DTFT):** $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$

Phụ lục 2

Some Fourier Relationships

The Fourier transform is the Laplace transform evaluated on the $j\infty$ axis.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt\right]_{s=j\omega}$$

The discrete-time Fourier transform is the z-transform evaluated around the unit circle.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^{-n}\right]_{z=e^{j\Omega}}$$

Discrete-time periodic signals can also be described by a *Fourier Series expansion*:

$$x[n] = \sum_{k\in<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \text{synthesis equation}$$

and

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \qquad \text{analysis equation}$$

then using the DTFT of the impulse train, $P(\Omega)$ that we previously found, the DTFT of an arbitrary discrete-time periodic signal can be found from $X_0(\Omega)$ the DTFT of one period $x_0[n]$

$$X(\Omega) = X_0(\Omega)\left(\frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})\right)$$

$$= \frac{2\pi}{N}\sum_k X_0(\frac{2\pi k}{N})\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

The DFT is simply a scaled version of the terms of one period of the discrete time Fourier transform for a periodic sequence:

$$X[k] = X_0(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1$$

for $\Omega = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1,...,N-1$, i.e. only look at the N distinct sampled frequencies of $X_0(\Omega)$.

Also important, the orthogonality of exponentials:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = N\delta[k]$$

where $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.